Mundo Fesc E-ISSN: 2216-0388 P- ISSN: 2216-0353 Artículo Original

Aportes al Desarrollo del Pensamiento Matemático mediante la Modelación Geométrica y la Resolución de Problemas

Contributions to the Development of Mathematical Thinking through Geometric Modeling and Problem Solving.

Recibido: 26 de agosto de 2022
Aprobado: 4 de diciembre de 2022

Forma de citar: L.M. Fonseca Vizcaya, O.R. Velásquez, M.C. Ramírez, "Aportes al Desarrollo del Pensamiento Matemático mediante la Modelación Geométrica y la Resolución de Problemas", *Mundo Fesc,* vol 13, no. 25, pp. 58-73 de 2023. https://doi.org/10.61799/2216-0388.1288

Luz Marina Fonseca Vizcaya*
Magíster en Gestión de la Tecnología Educativa
lfonseca54@uan.edu.co
Universidad Antonio Nariño
Bogotá, Colombia.

Osvaldo Rojas Velásquez
Doctor en Ciencias Pedagógicas
orojasv69@uan.edu.co
Universidad Antonio Nariño
Bogotá, Colombia.

Miguel Cruz Ramírez
Doctor en Ciencias Pedagógicas
mcruzr@uho.edu.cu
Universidad de Holguín
Holguín, Cuba.

***Autor para correspondencia:**
lfonseca54@uan.edu.co

Aportes al Desarrollo del Pensamiento Matemático mediante la Modelación Geométrica y la Resolución de Problemas

Resumen

El desarrollo del pensamiento matemático del ser humano juega un papel crucial en la solución de problemas y aporta significativamente al avance individual y social. Este artículo socializa los resultados obtenidos de una investigación que tuvo por objetivo contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a través de la modelación geométrica y la resolución de problemas en estudiantes del grado octavo, de una institución pública del departamento de Cundinamarca. El análisis de los antecedentes de las pruebas PISA y SABER mostró los bajos desempeños que tienen los estudiantes colombianos en la resolución de problemas y en la modelación. Además, los resultados obtenidos de la implementación de dos actividades exploratorias evidencian que existen escasas habilidades en estos dos procesos. En este marco, se diseñaron y se implementaron ocho actividades didácticas con contenido matemático avanzado adaptado a las edades y al nivel educativo, donde se vincularon dos procesos fundamentales: la modelación geométrica y la resolución de problemas y dos procesos intrínsecos a los fundamentales: la visualización matemática y el Sense Making. Se utilizó un enfoque cualitativo con un diseño de acción participativa, ocho rúbricas, grabaciones de video y audio, la observación participante y una encuesta final. Los resultados evidencian que los estudiantes avanzaron significativamente en el desarrollo de habilidades resolutorias de problemas en contextos simulados o reales, apoyándose en la modelación geométrica y la visualización matemática, donde construyeron conceptos matemáticos robustos dando sentido y significado matemático. Se concluye que la organización y la planificación de la acción práctica de la enseñanza de la matemática bajo los cuatro procesos contribuyeron significativamente al desarrollo robusto del pensamiento matemático de los estudiantes.

Palabras clave: educación secundaria, modelación geométrica, resolución de problemas, Sense Making, sistema de actividades, visualización matemática.

Contributions to the Development of Mathematical Thinking through Geometric Modeling and Problem Solving.

Abstract

The development of human mathematical thinking plays a crucial role in problem solving and contributes significantly to individual and social progress. This article socializes the results obtained from a research that aimed to contribute to the development of mathematical thinking through geometric modelling and problem solving in eighth grade students of a public institution in the department of Cundinamarca. The analysis of the background of the PISA and SABER tests showed the low performance of Colombian students in problem solving and modelling. In addition, the results obtained from the implementation of two exploratory activities show that there are scarce skills in these two processes. In this framework, eight didactic activities were designed and implemented with advanced mathematical content adapted to the age and educational level, where two fundamental processes were linked: geometric modelling and problem solving, and two processes intrinsic to the fundamental ones: mathematical visualisation and Sense Making. A qualitative approach was used with a participatory action design, eight rubrics, video and audio recordings, participant observation and a final survey. The results show that students made significant progress in the development of problem-solving skills in simulated or real contexts, relying on geometric modelling and mathematical visualisation, where they constructed robust mathematical concepts giving mathematical meaning and significance. It is concluded that the organisation and planning of the practical action of mathematics teaching under the four processes contributed significantly to the robust development of students' mathematical thinking.

Keywords: secondary education, geometric modeling, problem solving, Sense Making, activity system, mathematical visualization.

Introducción

El desarrollo del pensamiento matemático mediante un sólido proceso de enseñanza y aprendizaje permite alcances cognitivos relevantes en los estudiantes de básica secundaria [1]. Este proceso favorece la adquisición de habilidades y capacidades fundamentales para estudiar, comprender y usar conceptos matemáticos, establecer conexiones y relaciones entre ellos. También contribuye a la construcción de argumentos para validar y representar objetos de manera abstracta, beneficia la comunicación de ideas matemáticas y estimula la creatividad [2]. Por su parte, un robusto pensamiento matemático impacta de manera significativa la toma de decisiones diarias, el éxito académico y profesional, se comprende mejor el mundo que nos rodea y nos prepara para desafíos matemáticos complejos [3].

En los informes de las pruebas realizadas por el Programa para la Evaluación Internacional de los Estudiantes (PISA) [4] donde participaron jóvenes de 15 años de las diferentes instituciones educativas de Colombia, se constata que los resultados en matemáticas en el país son inferiores a la media de los países participantes pertenecientes a la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). En este análisis, un porcentaje mínimo de estudiantes pueden modelar situaciones y buscar estrategias para solucionar problemas matemáticos. Resultados similares se muestran en las evaluaciones externas estandarizadas aplicadas a todos los establecimientos educativos del país de la educación básica y media (SABER). Esta situación está dada, entre otras cosas, a las escasas habilidades que poseen los estudiantes, para hacer uso de la modelación durante el proceso de resolución de problemas [5], [6] y el limitado dominio de los conocimientos previos.

La revisión de la literatura permitió confrontar algunas dificultades de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas. Entre estas, el reconocimiento de variables y las relaciones entre ellas [7], escasas estrategias de abordaje para el análisis, la justificación, comprensión y contextualización de un problema [8] y reducidas habilidades para explicar las relaciones entre objetos reales y las matemáticas para explorar un problema social y abordarlo matemáticamente [5] y [9]. En este sentido, para contribuir a la mejora de los desempeños de los estudiantes en los establecimientos educativos del país, se debe generar un cambio revelador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas e impactar positivamente el desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. En aras de lograr óptimos aprendizajes y mejores habilidades, se hace necesario que los estudiantes muestren dominio en la resolución de problemas, apoyados en el proceso de la modelación geométrica a través de "una metodología que integre los dos procesos en toda actividad matemática" [10] Esta integración permite el desarrollo oportuno del saber matemático y el interés por el conocimiento.

Por tal motivo, esta investigación tiene como objetivo contribuir al desarrollo del pensamiento matemático de estudiantes de la básica secundaria del grado octavo, de una institución pública del municipio de Supatá, Cundinamarca, a través de la construcción robusta de conceptos matemáticos. Para ello, se implementa un sistema de actividades didácticas que contempla contenido matemático avanzado adaptado a su nivel escolar. Además, se integran en el aula dos procesos fundamentales: la modelación geométrica y la resolución de problemas en contextos reales auténticos cercanos a los estudiantes y dos procesos taxativos a los fundamentales: la visualización matemática y el Sense Making.

En este artículo, se presentan las intervenciones y los resultados obtenidos del proceso con 30 estudiantes. Antes de la intervención práctica se implementan dos actividades exploratorias para caracterizar el desempeño cognitivo de los estudiantes, con los datos recolectados se diseñan ocho actividades didácticas que contemplan cuatro momentos en su implementación: motivación exploración, estructuración y transferencia. También, para evaluar los desempeños se elabora una rúbrica para cada actividad, las cuales fueron validadas por un grupo de expertos. En esta dirección, para la construcción tanto de las actividades didácticas como de las rúbricas, se toman los aportes de cuatro referentes teóricos.

El primer referente es la modelación geométrica, según los resultados investigativos de [11], [1] y [12] el modelado es el medio para relacionar las matemáticas y la realidad, logrando despertar afinidad en el estudiante por conocer temas matemáticos en un contexto específico. De este modo, la modelación puede ser vista como una forma mediadora entre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la escuela, debido a sus conexiones con la realidad, pues según [11] permite usar el lenguaje de las matemáticas para cuantificar fenómenos del mundo real y analizar comportamientos.

Reconociendo que la modelación geométrica, propia de la modelación matemática, se registran algunas definiciones presentadas por autores que han vinculado la modelación geométrica en la práctica educativa de las matemáticas. Es así como, [13], [14], [15], [16] y [17] consideran que, es un proceso donde el conocimiento de la geometría se utiliza para representar objetos de la realidad, donde conciben la "representación" como un eje fundamental de la modelación y enfatizan en la importancia que esta tiene para la resolución de problemas.

Por tanto, la importancia de la modelación geométrica en la escuela radica en que, también puede ser usada como una estrategia didáctica, porque admite la realización o uso de modelos que favorecen la resolución y planteamiento de problemas en un contexto real o simulado, dando significado a la utilidad de las matemáticas en un ambiente de aprendizaje enriquecido. En el presente estudio la modelación geométrica se establece como un "proceso intencional de representación, donde se utilizan conocimientos y recursos para llevar a cabo el análisis, la formulación y la elaboración de un modelo, el cual brinda elementos para hacer inferencias que favorecen la solución de un problema en un contexto geométrico" [18].

En esta medida, [19] reconocen que el modelado geométrico optimiza el pensamiento visual y lógico, así como, las habilidades heurísticas, que permean el robustecimiento del pensamiento matemático de los escolares. Para [20] el pensamiento matemático se fortalece con el modelado geométrico cuando se abordan problemas retadores, que van desde lo real hacia lo matemático. Además, construir modelos y solucionar problemas, fortalecen destrezas resolutorias, que benefician el razonamiento abstracto, permitiendo que los estudiantes vinculen los conocimientos informales y los formales de la matemática para una mejor disposición en el aprendizaje, y un mayor progreso en sus niveles de desempeño [21].

El segundo referente es la resolución de problemas, el cual, fortalece el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en el aula. Por su parte, para [22] los problemas han ocupado un lugar fundamental en el currículo matemático, aunque los términos "problema" y "resolución de problemas" se han asumido con diversos significados. Entre estos significados, los autores señalan los siguientes: "Resolver problemas como contexto, como habilidad y para hacer matemáticas".

A partir de las definiciones de problemas retadores abordadas por [23], [24], [25], [26], [27] y [28] los problemas retadores son aquellos que: deben integrar conceptos coherentes y que para encontrar su solución obliga a los estudiantes a construir redes o mapas conceptuales que favorezcan el aprendizaje. Para [29] la resolución de problemas retadores asegura que los estudiantes piensen y razonen productivamente. Por tanto, el pensamiento matemático se amplía y se favorece en este proceso cuando se involucra la modelación geométrica. Asimismo, para [2] tanto la modelación geométrica como la resolución de problemas, permiten a los estudiantes explorar su creatividad y afianzar estrategias resolutorias, porque robustece las habilidades en la construcción de conceptos para alcanzar un pensamiento matemático robusto.

En el tercer referente teórico está la visualización matemática, concebida como una habilidad que presenta de diversas maneras la información visual, donde se hace uso de nociones matemáticas, del lenguaje y de lo gestual. Para [30], [31] y [32] la visualización debe ser vinculada en todos los modos del pensamiento matemático y formas de representación, para reproducir ideas de forma simbólica, numérica y gráfica. Por tanto, la visualización implica una comprensión que proviene de la intuición a través de imágenes formadas por la mente. Es así como, la visualización pone en ejercicio estructuras cognitivas para la resolución de problemas porque es un conjunto de procesos mentales que se dan en la actividad matemática permitiendo tres acciones fundamentales: representar, transformar y comunicar [18].

El cuarto referente es el Sense Making, para [33] el Sense Making como creación de sentido implica la construcción de entendimientos y significados plausibles. Siendo una actividad muy útil que requiere moverse entre la heurística y la generalización. De esta manera, crear sentido puede verse como un proceso, en el cual una persona da significado a la experiencia y le permite alcanzar conocimientos disciplinares. Para [34] el Sense Making en la educación concede a los estudiantes enmarcar su actividad como el camino para la construcción de nuevos saberes. Además, les permite descubrir nuevas oportunidades de aprendizaje utilizando sus ideas, intuiciones y experiencias propias. En esta medida, el sentido matemático, se construye a partir del abordaje de problemas en diversos contextos como fuente de significado, porque el estudiante vincula elementos de su entorno y la realidad.

Materiales y métodos

La investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo con un diseño de investigación acción participativa, centrado en los sujetos de forma integral y completa, por medio de un proceso de indagación inductivo, de interacción con los participantes y bajo el análisis de los datos descriptivos recolectados a raíz del avance de los acontecimientos. Además, se buscó construir la realidad tal como se observa, de manera objetiva durante todo el proceso, sin alterar ni imponer, donde nos apropiamos de una realidad epistémica en relación con los individuos partícipes [34], cuyo objetivo fue cambiar la realidad, ofreciendo una oportunidad para mejorar y fortalecer la construcción del saber matemático en los estudiantes que participan. El desarrollo de este estudio se realizó con 30 estudiantes de secundaria de la Institución Educativa Nuestra Señora de la Salud (Supatá, Colombia) del octavo grado. Esta unidad de análisis se seleccionó de manera intencional, según características específicas del grupo, la condescendencia y oportunidad de acercamiento por parte de los investigadores, organizados en 10 grupos equitativos, nombrados como G1, G2 hasta llegar a G10.

Se implementaron ocho actividades didácticas, cada una de ellas contemplaban 4 momentos: de exploración, en este momento se desarrollan ejercicios de visualización mental de objetos geométricos y momento de motivación en este se llevan a cabo experiencias sencillas donde se usa material concreto estructurado y no estructurado. También, el momento de estructuración, donde se proponen problemas retadores con base en contextos simulados, y el momento de transferencia, en este se proponen problemas retadores en contextos reales auténticos (lugares conocidos por los estudiantes). El proceso de resolución de problemas se estudia con base en tres fases sugeridas por [36] abordaje, ataque y revisión. En cuanto, al proceso de modelación, se hizo bajo el ciclo simplificado recomendado por [37] (simplificar, matematizar, interpretar y validar).

Para la recolección de los datos se usaron ocho rúbricas para evaluar de manera objetiva y crítica el aprendizaje construido y las habilidades desarrolladas por los estudiantes durante el proceso, una encuesta con preguntas cerradas y algunas abiertas, cuyo propósito fue identificar las percepciones de los estudiantes con respecto a la implementación de las actividades en aula. Además, se llevó a cabo el análisis de las grabaciones en video y la observación participante para la identificación de argumentos relacionados con los logros y dificultades en el proceso de aprendizaje.

Resultados y discusión

El análisis de los resultados evidencia un dominio efectivo del contenido matemático abordado, los estudiantes usan sus conocimientos previos, donde no solo construyen nuevos saberes, sino que, también fortalecen aquellos que aún no dominaban completamente, lo cual se da en la misma dirección a lo asumido por [21]. A pesar de que los temas abordados no forman parte del currículo y son de un nivel avanzado, se nota que los estudiantes logran una comprensión sólida de los mismos y se muestran motivados en la exploración y la consolidación de nuevos aprendizajes (Tabla I). La planificación y ejecución de las actividades en las cuatro etapas (motivación, exploración, estructuración y transferencia) evidencian un progreso cognitivo notable por parte de los estudiantes.

Tabla I. Logros en el aprendizaje alcanzados por los estudiantes en cada actividad didáctica.

N° Actividad	Objetivo	Logros alcanzados en el aprendizaje
1 Camino Hamiltoniano	Construir el concepto de camino hamiltoniano a través de un contexto real auténtico.	L1. Usaron el concepto de camino para encontrar rutas y patrones en situaciones que implican conexiones entre puntos o lugares. L2. Identificaron las características de un camino hamiltoniano L3. Reconocieron caminos hamiltonianos en un contexto real.
2 Ciclo Hamiltoniano	Construir el concepto de ciclo hamiltoniano a través de un contexto real auténtico.	L1. Entendieron cómo un recorrido puede comenzar y terminar en el mismo vértice, formando un ciclo cerrado. L2. Establecieron diferencias entre un camino y un ciclo hamiltoniano a partir de representaciones visuales.
3 Triángulacion de polígonos	Encontrar el área de figuras bidimensionales a través de la descomposición en triángulos por un conjunto máximo de diagonales.	L1. Analizaron cómo los triángulos pueden conformar un polígono de mayor área. L2. Descompusieron figuras en partes más pequeñas y reconstruyeron la figura original al sumar las áreas de los triángulos.
4 Teorema de Chvatal	Usar la triangulación del área de una figura bidimensional y la coloración de sus vértices para representar afirmaciones del enunciado del teorema de la galería de arte de Chvatal.	L1: Descompusieron el área de un polígono en áreas de triángulos. L2: Determinaron el número cromático donde exploran propiedades estructurales de los grafos L3: Reconocieron que un polígono de n vértices se puede vigilar utilizando con un máximo [n/3] cámaras.
5 Diagramas de Voronoi	Identificar el concepto de punto, plano, semiplano, segmento, mediatriz y circuncentro en la construcción de un diagrama de Voronoi.	L1. Representaron la división de un espacio en regiones basado en la proximidad a un conjunto de puntos determinados. L2. Reconocieron los límites o fronteras de las regiones de Voronoi como resultado de la división del espacio en función de la distancia a los puntos.
6 Teorema de Viviani (1)	Reconocer las características a partir de las posibles ubicaciones de un punto en una región triangular equilátera para la visualización de afirmaciones enunciadas en el teorema de Viviani.	L1. Identificaron que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados es igual a la altura del triángulo. L2. Reconocieron que independientemente de la posición del punto dentro del triángulo equilátero, la suma de las distancias a los lados siempre será igual a la altura del triángulo.

7 **Teorema de Viviani (2)**	Reconocer las características dadas a partir de las posibles ubicaciones de un punto en una región cuadrangular.	L1. Reconocieron que independientemente de la posición del punto dentro de un cuadrado, la suma de las distancias a los lados siempre será igual al semiperímetro. L2. Aplicaron conceptos matemáticos para resolver situaciones del mundo real y simuladas.
8 **Teorema de las alfombras**	Encontrar la congruencia de figuras bidimensionales a través de la descomposición del área para visualizar afirmaciones enunciadas en el teorema de la alfombra.	L1. Identificaron cómo se superponen dos alfombras y cómo se divide el piso en regiones distintas. L2. Comprendieron el concepto de superficie y cómo se puede dividir una superficie en diferentes partes usando objetos geométricos. L3. Calcularon áreas de figuras geométricas que se superponen.

Fuente: Elaboración Propia

En cuanto a la visualización, los grupos logran comprender de manera clara y rápida las ideas de los problemas propuestos y desarrollan habilidades para llevar a cabo diversas formas de representar, como lo asume [29]. Así mismo, pueden comprobar si sus soluciones o las de sus pares tienen sentido y cómo comunicarlas de manera efectiva, como parte primordial del uso de estrategias metacognitivas en las que se apoyan los estudiantes para dar solución a un problema matemático como es asumido por [3]. Dado que, se concibe un aprendizaje potencial a partir de la interrelación y socialización con sus pares.

Con respecto, a la resolución de problemas en la fase de "abordaje" los estudiantes identifican estrategias para resolverlos, hacen uso de la parte experiencial que se da en los primeros momentos de la actividad. En la fase "ataque" se apoyan en reglas geométricas, construyen modelos para llegar a la solución y en la fase "revisión" reconocen sus aciertos y descubren las variadas formas de resolverlos. En este sentido, los estudiantes alcanzan potencialmente habilidades para la resolución de problemas como lo propone [35] dado que, estas habilidades se favorecen a medida que se consolidan estrategias en cada una de ellas, permitiendo que los problemas matemáticos sean más comprensibles para resolver.

Enfatizando, en las fases de la resolución de problemas, el 72% de los grupos en la competencia de abordaje logran un nivel desempeño alto (DA) y el 28% en (DM). En la fase de ataque, el 73% en DA y el 27% en DM y en la fase de revisión un 81% en DA y 19% en DM. En esta medida, se encuentran progresos significativos en cada una de ellas. Por su parte, la fase con mayor dificultad para los grupos es el "abordaje" dado a sus pocas habilidades en la comprensión de un problema y la identificación de variables, lo cual se optimiza a medida del trabajo en aula, como se muestra en el gráfico N°1.

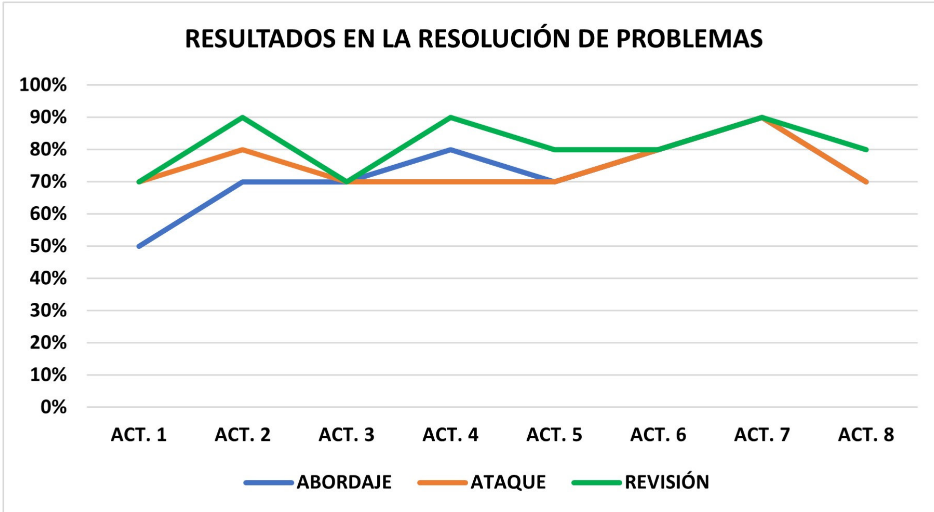

Gráfico 1. Desempeño de los grupos en el proceso de la Resolución de Problemas.

Durante el desarrollo de las actividades, la resolución de problemas es un proceso dinámico que estimula la creatividad de los estudiantes, evidenciando lo asumido por [2], donde aplican los conocimientos adquiridos para dar significado a la realidad. En este proceso, se evidencia la capacidad de los estudiantes para analizar, comprender, razonar y generalizar a partir de diversos contextos, dando apelación a lo contemplado con [29]. Por lo tanto, la resolución de problemas matemáticos retadores obtiene la integración de la modelación matemática, donde ambos procesos se desarrollan de manera inherente en el estudiante. Es así como, la de resolución problemas involucra situaciones en contextos reales o simulados que permiten determinar la seguridad del modelo y la confianza de las respuestas obtenidas.

En relación con la modelación geométrica, en la fase “simplificar” los grupos logran comprender los problemas, por medio de preguntas heurísticas e identifican los aspectos claves. En la fase “matematizar” crean diversos modelos y usan algoritmos matemáticos para acercarse a la solución. En la fase “interpretar” a partir de los resultados obtenidos en cada grupo y en la socialización con sus pares, consolidan los conceptos previstos para cada actividad. En este sentido, los grupos relacionan estas interpretaciones con el contexto real del problema y en la fase “validar” los estudiantes revisan sus respuestas, identificando si son acertadas y si éstas dan una solución al problema, además comunican a sus compañeros de forma clara sus resultados y cómo llegaron a ellos. De este modo, los estudiantes logran llevar a cabo las cuatro fases en el modelado alcanzando destrezas resolutorias considerables como lo disciernen [37].

En las fases de la modelación geométrica la evolución es relevante a medida en que se avanza en la implementación, en la fase de simplificar el 70% de los grupos logran el desarrollo de competencias en un DA y el 30% en un DM, en la fase matematizar un 73% en DA y el 27% en DM, en la fase interpretar el 75% logra un nivel un DA y el 25% en DM y en la fase validar el 81% se encontró en un DM y 19% en DA. Por consiguiente, las fases de simplificar y matematizar fueron de mayor exigencia para los grupos como se muestra en el gráfico N° 2.

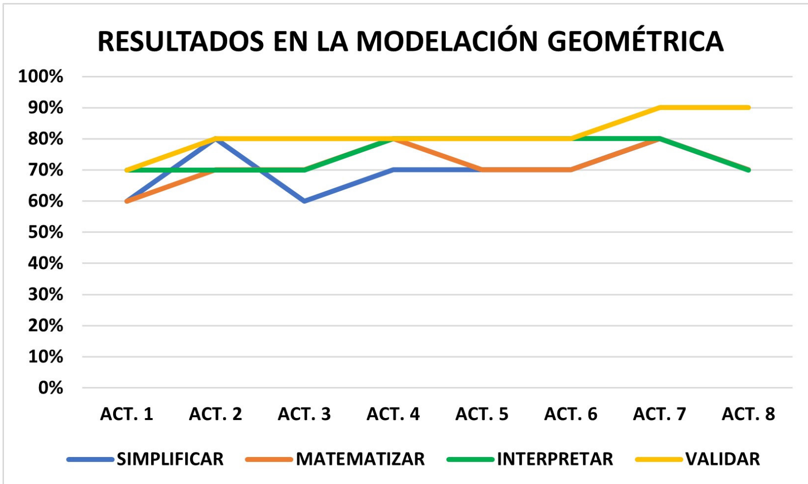

Gráfico 2. Desempeño de los estudiantes en el proceso de Modelación Geométrica

La modelación geométrica contribuye sustancialmente a la comprensión de las matemáticas, otorgando significado a la realidad simplificada, que pueden los estudiantes transformar en la formalidad matemática, como lo admite [19]. Los modelos geométricos desarrollados establecen vínculos estrechos con la resolución de problemas, el sentido y el pensamiento matemático. Por ende, la resolución de problemas promueve el aprendizaje y el progreso continuo a través de la construcción de modelos para el análisis y obtención de una respuesta que favorece la experiencia para aplicarlos a situaciones similares.

En consecuencia, la modelación geométrica y la resolución de problemas ofrecen a los estudiantes la capacidad de reconocer la importancia y los beneficios de las matemáticas, mejorando la motivación y la comprensión, evidenciando lo exteriorizado por [2]. Además, les permite seleccionar y utilizar adecuadamente herramientas matemáticas, tanto en entornos reales como simulados. Asimismo, facilita la conexión entre la teoría y la práctica, fomentando un aprendizaje significativo que contribuye al sólido entendimiento de los conceptos matemáticos.

Por su parte, en el Sense Making los grupos desarrollan un entendimiento significativo de conceptos geométricos donde se reconocen las afirmaciones de [34]. De igual manera, hacen un acercamiento a generalizar reglas a partir de situaciones para fortalecer su sentido matemático en concordancia con [3] y desarrollan algunas habilidades en la resolución de problemas retadores en contextos y favorecen la habilidad de visualización y conceptualización de relaciones geométricas.

En cuanto a los resultados generales de las ocho actividades, en cada uno de los cinco procesos los estudiantes alcanzan los aprendizajes propuestos y se ubican en los niveles medio y alto. Esto demuestra que los procesos se fortalecen a medida que se interviene en el aula. Por tanto, los resultados promedio muestran que el 62% de grupos, se encuentran en DA y el 38% en DM, como se evidencia en el gráfico N°3.

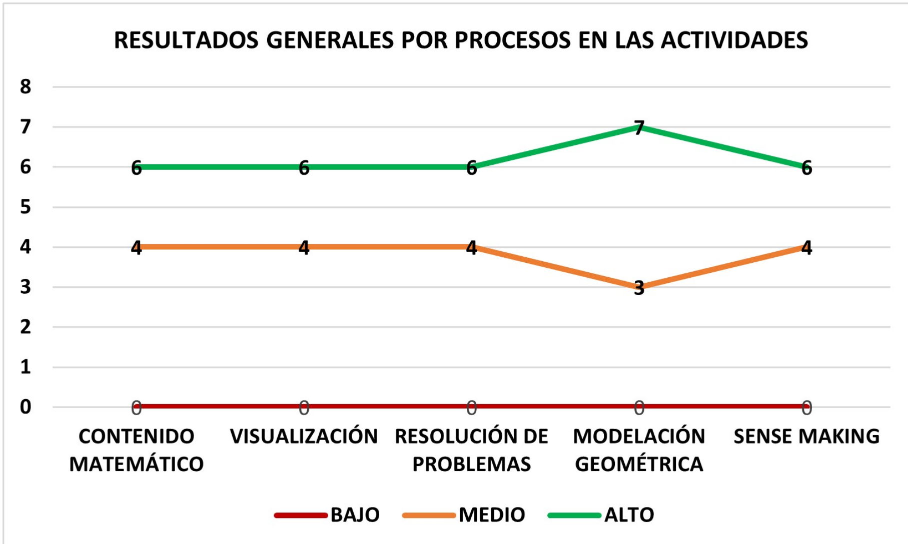

Gráfico 3. Resultados generales de los estudiantes en las 8 actividades

La encuesta realizada a los estudiantes luego de la intervención en el aula evidencia que el 70% de los estudiantes reconocen en un alto grado la motivación para la construcción del aprendizaje, el 80% considera que las actividades les generó motivación para el trabajo autónomo, el 90% afirman que los problemas trabajados en el aula son retadores y les permite la construcción de conceptos matemáticos nuevos y el 70% identifica que existen mejoras en las habilidades y capacidades en los procesos de resolución de problemas, modelación geométrica, visualización y Sense Making. En esta medida, existe un buen consenso de los grupos de trabajo y una validación positiva a las actividades didácticas trabajadas.

Con respecto a la pregunta abierta sobre los aspectos que consideran interesantes en las actividades, los grupos dan diversos argumentos. Entre estos, un estudiante del grupo 3 (G3) sostiene que "Los problemas fueron interesantes". Aunque, algunos fueron difíciles, pero pudimos resolverlos". Por su parte, G7 asegura que "Fue interesante usar la computadora y programas para solucionar los problemas", entre otros argumentos que dejan muestra del impacto positivo que tuvo el desarrollo de las actividades didácticas en el aprendizaje de los estudiantes y la motivación generada durante la intervención.

Conclusiones

El conjunto de actividades propuesto favoreció el proceso de aprendizaje, facilitando el desarrollo de habilidades cognitivas, capacidades y la construcción de significado de conceptos de manera integral. Esto posibilitó que el estudiante pudiera integrar exitosamente la tecnología, la comunicación efectiva, la creatividad y el trabajo en equipo en su aprendizaje.

Los estudiantes adquirieron destrezas en la resolución de problemas, logrando implementar estrategias para identificar información relevante en cada problema. Asimismo, fueron capaces de descomponerlos en componentes más simples, aplicando conceptos matemáticos a contextos reales o simulados, y mejoraron sus habilidades comunicativas al expresar de manera clara ideas matemáticas.

Durante la fase de modelación geométrica, los estudiantes abordan problemas matemáticos mediante la aplicación de principios geométricos. Planificaron y construyeron modelos válidos que les posibilitaron reflexionar sobre situaciones del mundo real, simplificando complejidades hacia modelos geométricos más accesibles en busca de la abstracción y la generalización. El intercambio de ideas con sus compañeros enriqueció su comprensión, y mostraron mejoras progresivas a medida que avanzaban en la implementación del sistema de actividades.

La utilización de la visualización matemática fue beneficiosa para el proceso de aprendizaje en la implementación del sistema de actividades. También se progresó en el fortalecimiento de habilidades para identificar las relaciones entre objetos geométricos y figuras en el espacio. Mediante las actividades de visualización mental en la etapa de motivación, los estudiantes lograron imaginarse y manipular objetos y figuras geométricas. En la creación de sentido y significado matemático, los estudiantes avanzaron notablemente al establecer conexiones entre los conceptos matemáticos y su aplicación en diversos contextos. Asimismo, mejoraron sus habilidades para resolver problemas y aplicar la modelación en situaciones que involucraban contextos reales o simulados expresándolos en términos matemáticos. De igual forma, lograron comunicar eficazmente sus ideas y fueron conscientes de sus progresos en el proceso de aprendizaje.

Se consideran aportes importantes en el aprendizaje con el desarrollo de las actividades en cada uno de los momentos que las componen (motivación, exploración, estructuración y transferencia). Por tanto, la organización y la planificación de la acción práctica de la enseñanza de la matemática contribuyó significativamente al desarrollo robusto del pensamiento matemático de los estudiantes.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Universidad Antonio Nariño sede Federman, por el respaldo y aportes a la investigación a través del Doctorado en Educación Matemática. Así como, a la Institución Educativa Departamental Nuestra Señora de la Salud por facilitar los espacios físicos y tecnológicos para la implementación práctica de las actividades.

Referencias

[1] G. Stillman, "Applications and modelling research in secondary classrooms: What have we learnt?" *In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham, pp.791-805, 2015

[2] M. Wickstrom, "Roscoe Geometric Modeling: determining the Largest Lake", *Mathematics Teacher: Learning and Teaching* PK-12, vol. 113, no. 8, pp. 643-650, 2020

[3] A. Schoenfeld, "The What and the Why of Modeling. In Affect in Mathematical Modeling", En S. Chamberlin y B. Sriraman, *Springer, Cham*, pp.91-96, 2019

[4] Programa para la Evaluación Internacional de Alumnos (PISA). Colombia. Noviembre de 2020. [Online]. Available: https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_COL_ESP.pdf

[5] S. Edo, R. Putri y Y. Hartono, "Investigating secondary school students' difficulties in modeling problems PISA-Model Level 5 and 6", *Journal on mathematics Education*, vol. 4, no. 1, pp. 41-58, 2013

[6] J. Villa y C. López, "Sense of reality through mathematical modelling. In Trends in teaching and learning of mathematical modelling", pp. 701-711. *Springer*, 2011

[7] M. Sol, J. Giménez y N. Rosich, "Trayectorias modelizadoras en la ESO". *Modelling in Science Education and Learning*, 4, pp. 329-343, 2011

[8] M. Socas, J. Hernández y M. Palarea, "Dificultades en la resolución de problemas de Matemáticas de estudiantes para profesor de educación primaria y secundaria", *Funes*, pp.145-154, 2014

[9] D. Kadijevich, "Simple spreadsheet modeling by first-year business undergraduate students: Difficulties in the transition from real world problem statement to mathematical model", En Blomhj, M, & Carreira, S. *Proceedings of the 11th International Congress on mathematical Education*. IMFUFA 461, pp. 241-248, 2009

[10] L. Rico, "La competencia matemática en PISA", *Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, vol. 1, no. 2, pp. 47-66, 2007

[11] K. Bliss y J. Libertini, *Lineamientos para la evaluación e instrucción en la educación en modelación matemática*, Gaimme. Society for industrial and applied mathematics

(SIAM), 2020

[12] W. Blum, P. Galbraith, H. Henn y M. Niss, "Modelling and applications in mathematics education", vol. 10, MA: *Springer US*, 2007

[13] C. Alsina, "Geometría y realidad", *Sigma*, vol. 33, pp.165-179, 2008

[14] F. Zapata, N. Cano y J. Villa, "Art and Geometry of Plants: Experience in Mathematical Modelling through Projects", *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, vol. 14, no. 2, pp. 585-603, 2017

[15] P. Herbst y N. Boileau, "Geometric modeling of mesospace objects: A task, its didactical variables, and the mathematics at stake", *In Visualizing Mathematics Springer, Cham*, 2018

[16] M. Ludwig y S. Jablonski, "Doing Math Modelling Outdoors-A Special Math Class Activity designed with MathCityMap", *In HEAD 19. 5th International Conference on Higher Education Advances*, Universität Politécnica de Valéncia, pp. 901-909, 2019

[17] Entrevista Y. Baldín, 2021

[18] L. Fonseca. "Modelo didáctico para el desarrollo del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas y la modelación geométrica". [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad Antonio Nariño. Colombia, 2022

[19] A. Balyakin y L. Chempinsky, "Experience of teaching geometric modeling at schools and universities", *In Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1691, no. 1, pp. 012042, 2020

[20] P. Herbst, "Geometric Modeling Tasks and Opportunity to gain experience Geometry: The Ranking Triangles Task Revisited", *In Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development,* pp. 123-143. *Springer*, Cham, 2019

[21] T. Braicovich, S. Oropeza, y V. Cerda, "Un desafío: incluir grafos en los distintos niveles educativos", *Memorias del II REPEM*, pp. 70-76, 2008

[22] G. Stanic y J. Kilpatrick. Historical perspectives in problem solving. Research Agenda for Mathematics Education: The Teaching and Assessing of Problem Solving. National Council for Teachers of Mathematics. Taylor, S. & Bogdan,1988

[23] S. Krulik y J. Rudnick, *Problem solving: A handbook for teachers*. Allyn and Bacon, Inc., 7 Wells Avenue, Newton, Massachusetts 02159, 1987

[24] M. Falk, "La enseñanza a través de problemas", *Universidad Antonio Nariño*, Bogotá,

Colombia. 1980

[25] M. Diaz y Á. Poblete, "Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula". *Números*, 45, pp. 33-41, 2001

[26] F. Pérez., *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas para primaria 2000 - 2004*. Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 2004

[27] J. Sigarreta y J. Marcia, "Modelo Didáctico para la Formación Axiológica a través de la Resolución de Problemas Matemáticos", *Matemática, educación e internet*, vol.4, 2003

[28] M. Pochulu y M. Rodríguez, *Educación Matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*, Villa María, Argentina: Editorial Universitaria Villa María, pp. 155, 2012

[29] R. Mesino, "Modelo pedagógico inclusivo para la enseñanza aprendizaje de la matemática a través de la resolución de problemas de niños en grado quinto con TDAH". [Tesis de doctorado no publicada]. Universidad Antonio Nariño. Colombia, 2022

[30] W. Zimmermann y S. Cunningham, "Editor's introduction: What is mathematical visualization", *Visualization in teaching and learning mathematics*, vol. 1, no. 8, 1991

[31] N. Presmeg, "Research on visualization in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology", *In Handbook of research on the psychology of mathematics education*, pp. 205-235, 2006

[32] R. Hershkowitz, *Psychological aspects of learning geometry, In Mathematics and cognition*, pp. 70-95, The Weizmann Institute of Science, 1990

[33] D. Ancona, "Framing and Acting in the Unknown", S. Snook, N. Nohria, & R. Khurana, *the handbook for teaching leadership*, vol. 3, no. 19, pp.198-217, 2012

[34] T. Odden y R. Russ, "Defining sensemaking: Bringing clarity to a fragmented theoretical construct", *Science Education*, vol. 103, no. 1, pp.187-205, 2019

[35] C. Castaño Y M. Quecedo, *Introducción a la metodología de investigación cualitativa*, 2002

[36] J. Mason, L. Burton, y K. Stacey, *Thinking Mathematically*, Harlow: Pearson, 2010

[37] J. Brown y G. Stillman, "Developing the roots of modelling conceptions: 'Mathematical modelling is the life of the world", I*nternational Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, vol. *48, no.* 3, pp. 353-373, 2012