

Estrategia Didáctica Para la Comprensión y Aplicación de las Razones Trigonométricas

Didactic Strategy for the Understanding and Application of Trigonometric Reasons

Recibido: 26 de agosto de 2022

Aprobado: 4 de diciembre de 2022

Forma de citar: D. L. Medina Delgado, A. M. Serpa Jiménez, P. Ramírez Leal, "Estrategia Didáctica Para la Comprensión y Aplicación de las Razones Trigonométricas", *Mundo Fesc*, Vol. 13, no. 25, pp. 207-223, 2023. <https://doi.org/10.61799/2216-0388.1514>

Dayana Lilibeth Medina Delgado 

Especialista en Informática Educativa
dayanalilabethmd@ufps.edu.co
Universidad Francisco de Paula Santander
Cúcuta, Colombia

Alejandra María Serpa Jiménez 

Magíster en Educación Matemática
alejandramariaserpa@ufps.edu.co
Universidad Francisco de Paula Santander
Cúcuta, Colombia

Pastor Ramírez Leal 

Magíster en Educación Matemática y
Licenciado en Matemáticas y Computación
pastorramirez@ufps.edu.co
Universidad Francisco de Paula Santander
Cúcuta, Colombia

*Autor para correspondencia: alejandramariaserpa@ufps.edu.co



Estrategia Didáctica Para la Comprensión y Aplicación de las Razones

Resumen

Esta investigación se centra en el desarrollo de una estrategia didáctica con el fin de mejorar la aplicación de las razones trigonométricas en la resolución de problemas contextualizados para estudiantes de décimo grado en el Colegio Claudia María Prada, de la ciudad de Cúcuta. La investigación se lleva a cabo mediante un enfoque cualitativo, utilizando la metodología de investigación-acción y con la participación de ocho estudiantes como informantes. Los instrumentos utilizados para la recopilación de datos incluyen una prueba diagnóstica, observaciones directas durante la implementación de la estrategia y la evaluación final. A través de una serie de actividades que comienzan recreando situaciones históricas se incentiva a los estudiantes a superar la principal dificultad detectada en el diagnóstico en relación con sus conocimientos previos y, gradualmente, se introduce el tema de las razones trigonométricas, contribuyendo a superar estas dificultades y potenciar las habilidades matemáticas de los estudiantes en relación con la resolución de triángulos mediante las razones trigonométricas en situaciones cotidianas.

Palabras clave: Competencias matemáticas, estrategia didáctica, razones trigonométricas, triángulos rectángulos, situaciones

Didactic Strategy for the Understanding and Application of Trigonometric Reasons

Abstract

This research focuses on the development of a didactic strategy in order to improve the application of trigonometric ratios in the resolution of contextualized problems for tenth grade students at the Claudia María Prada School, in the city of Cúcuta. The research is carried out through a qualitative approach, using the action research methodology and with the participation of eight students as informants. The instruments used for data collection include a diagnostic test, direct observations during the implementation of the strategy and the final evaluation. Through a series of activities that begin by recreating historical situations, students are encouraged to overcome the main difficulty detected in the diagnosis in relation to their previous knowledge and, gradually, the topic of trigonometric ratios is introduced. Contributing to overcome these difficulties and enhance the mathematical skills of students in relation to the resolution of triangles by means of trigonometric ratios in everyday situations.

Keywords: Mathematical competences, didactic strategy, trigonometric ratios, right-angled triangles.

Introducción

El Ministerio de Educación en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas tiene como objetivo entregar a la sociedad niños y adolescentes con habilidades y competencias para ejercer sus derechos y deberes. Así mismo el gobierno en su plan de educación propone el fortalecimiento de ciertos procesos matemáticos como lo es "formular y resolver problemas; modelar procesos y fenómenos de la realidad; comunicar; razonar, y formular, comparar y ejercitar procedimientos y algoritmos" esto con el fin de hacer que el estudiante sea un ciudadano matemáticamente competente [1]. De acuerdo al [1], ser matemáticamente competente no implica solamente la ejecución de procedimientos matemáticos, sino un entendimiento profundo de los conceptos y la capacidad de aplicarlos de manera reflexiva y flexible en diversas situaciones, requiriendo para ello, actitudes y disposiciones positivas hacia las matemáticas.

En este contexto, el presente artículo se enfoca en la creación de una estrategia didáctica alineada con los procesos matemáticos propuestos por el [1]. Esta estrategia busca facilitar el aprendizaje significativo de las razones trigonométricas a través de situaciones contextualizadas, proporcionando a los estudiantes la oportunidad de explorar y comprender la aplicabilidad de estos conceptos en la vida real. La investigación se lleva a cabo en la institución educativa Colegio Claudia María Prada Ayala, específicamente con estudiantes de grado décimo de la sede B "Hermano Rodulfo Eloy". Los resultados de las pruebas saber 11 y las Pruebas Evaluar para Avanzar indican dificultades significativas en el área de matemáticas, especialmente en el componente geométrico y en temas relacionados con la trigonometría.

Al analizar la coherencia horizontal de los Estándares Básicos de Competencias sobresale la importancia en lograr que los estudiantes de grado décimo se apropien del tema de razones trigonométricas como la base para asumir el reto de comprender las funciones trigonométricas, un tema fundamental en este nivel educativo. Además, teniendo en cuenta que las pruebas de estado suelen abordar situaciones relacionadas con la resolución de triángulos rectángulos, este artículo se vuelve aún más relevante en su contribución al mejoramiento del rendimiento académico. La propuesta didáctica presentada por [2] incluye talleres específicos relacionados con el Teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas. Se destaca la importancia de utilizar la didáctica y la pedagogía, así como elementos históricos y tecnológicos en la enseñanza de las matemáticas, exponiendo a los estudiantes a situaciones que llevaron a los pensadores del pasado a desarrollar los conocimientos trigonométricos, así como la interdisciplinariedad que se promueve al abordar el Teorema de Pitágoras en relación con la geometría, el álgebra, la trigonometría y la teoría de números.

El objetivo es presentar a los estudiantes un tema aparentemente complejo de manera divertida, fomentando el trabajo en grupo y promoviendo un aprendizaje significativo al abordar situaciones reales que requieren la aplicación de competencias matemáticas. Esta propuesta concuerda con la misión de la institución educativa, que busca formar individuos con espíritu investigativo e íntegro, comprometidos con el desarrollo de la sociedad [3].

La tendencia de los estudiantes a cuestionar la utilidad práctica de lo que están aprendiendo sugiere una desconexión entre el contenido académico y su aplicabilidad en la vida cotidiana. La actitud desafiante o menospreciativa hacia las matemáticas puede ser interpretada como una señal de que los estudiantes no encuentran trascendencia en lo que están estudiando. Esta situación plantea un desafío importante para los docentes, pues la sensación de que el conocimiento compartido no deja una huella duradera en los estudiantes sugiere una brecha en la efectividad de los métodos de enseñanza. La premura de la situación invita al abordaje esta brecha para que el aprendizaje sea más significativo y aplicable a situaciones del mundo real.

Al hacer una reflexión profunda nace la necesidad de replantear el enfoque pedagógico y diseñar estrategias que conecten los conceptos matemáticos con experiencias prácticas y problemas que atraigan la atención de los estudiantes, al hacerlo, se podría restaurar el interés y la comprensión de la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana, superando así la percepción de que son conocimientos abstractos sin utilidad. Es evidente la necesidad de desarrollar una estrategia didáctica que aborde estas dificultades y motive a los estudiantes a comprender y aplicar las razones trigonométricas. La trigonometría, aunque considerada un tema relativamente sencillo, puede volverse desafiante para los estudiantes debido a la falta de motivación y conexión con su entorno. Esta estrategia busca subsanar esta deficiencia, proporcionando a los estudiantes una experiencia educativa más atractiva y efectiva en el aprendizaje de las razones trigonométricas.

Dentro de las investigaciones relacionadas se encuentra "La modelación matemática y los problemas de aplicación como promotores de la creatividad en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría", realizada por [4], se trata de una investigación de enfoque cualitativo usando el método acción participativa, Este trabajo tenía como objetivo confirmar la influencia que tiene la resolución de problemas para el aprendizaje de las matemáticas, relacionados con la trigonometría. La investigación logró que los estudiantes se convirtieran en autores creativos de su propio aprendizaje, tomando de su entorno escolar todos los recursos necesarios para aprender lo principal de la trigonometría. Por otra parte, [5], en su investigación titulada "Midiendo Ángulos y Razón Trigonométrica, Aprendizaje Basado en la Resolución de Problemas de la Vida Cotidiana" tenía como objetivo integrar la parte lógica y vivencial con las matemáticas. se centró en estudiantes del 2do año de Bachillerato Técnico en Contabilidad en la Unidad Educativa Babahoyo, Ecuador. Se descubrió que ellos se dedicaban a estrategias relacionadas con la producción, como ventas, mercadeo, elaboración e investigación de mercado, descuidando en gran medida desarrollo matemático-lógico-vivencial. Sin embargo, se encontró que aquellos que participaron en esta secuencia didáctica experimentaron mejoras significativas en su aprendizaje de las matemáticas. Se avanzó en el desarrollo del pensamiento racional y la utilización de reglas del debate matemático para formular explicaciones y presentar soluciones, destacando así la eficacia de este enfoque enriquecedor.

Asimismo, [6], llevó a cabo una investigación titulada "El Aprendizaje de la Matemática y los Procesos Cognitivos en la Solución de Tareas con Razones Trigonométricas en la Institución

Educativa Pompilio Martínez de Cajicá, Colombia". El objetivo principal de este estudio fue determinar la relación que podría existir entre los procesos cognitivos y el aprendizaje de las matemáticas en estudiantes de grado décimo. Para alcanzar este propósito, se empleó una muestra de 299 estudiantes, representado el 22% de la población total. La investigación se enmarcó en un enfoque cuantitativo y utilizó un diseño cuasiexperimental de tipo transaccional descriptivo. La investigación que tiene por título "Pequeños Científicos" Potenciando los Aprendizajes de la Trigonometría en el Grado Décimo" realizada [7], cuyo propósito era renovar la forma en que se imparte la enseñanza de la trigonometría, con el propósito de estimular el aprendizaje de los estudiantes de décimo grado a través del programa denominado "Pequeños Científicos". Esta investigación, de naturaleza cualitativa, se basó en la observación de 19 estudiantes de grado décimo en la Institución Educativa José Celestino Mutis.

Las cuatro investigaciones mencionadas anteriormente trabajan los estilos de aprendizaje desde diferentes ángulos, que es lo que se busca con el diseño de la estrategia didáctica del presente trabajo. La metodología cualitativa utilizada por [8] al trabajar sobre la predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria al resolver problemas trigonométricos, se basa en teorías de aprendizaje significativo y modelos mentales, así como los hallazgos sobre la familiaridad de los estudiantes con actividades mecánicas en lugar de problemas, el predominio de representaciones mentales en formato de imágenes, y la incidencia del componente emocional en el bloqueo del desempeño de los estudiantes.

Por su parte, La investigación realizada [9] sobre la contextualización en matemáticas y el uso del teorema del ángulo inscrito en la geometrización de la percepción visual como un referente importante para el diseño de estrategias didácticas efectivas, destaca la importancia de vincular las matemáticas que se enseñan en la escuela con situaciones del mundo real, como la percepción visual, y cómo el uso de teoremas matemáticos específicos, como el teorema del ángulo inscrito, puede ser aplicado en contextos prácticos. En Valle del Guamuez en Putumayo, [10], llevaron a cabo la investigación "Situaciones Didácticas en la Enseñanza de las Razones Trigonométricas en Estudiantes de Grado Décimo" revelan la efectividad de las situaciones didácticas como herramienta pedagógica para promover y fortalecer el pensamiento geométrico en estudiantes. A través de este modelo, los estudiantes, dentro de un entorno diseñado específicamente para ello, adquieren los recursos necesarios para construir su propio conocimiento, cumpliéndose de esta manera el objetivo de la investigación. Este estudio se enmarca en la metodología de la ingeniería didáctica y se llevó a cabo con estudiantes de décimo grado, tanto hombres como mujeres, con edades comprendidas entre los 14 y 18 años.

El proyecto descrito en el párrafo anterior guarda concordancia con el presente trabajo de investigación, en el modo en que gradualmente se les muestra el camino a los estudiantes para conducirlos al aprendizaje por medio de actividades llamativas, no solo a plantear por ellos mismos nuevos conceptos de trigonometría sino hacerles ver la utilidad que estos conceptos tienen en la vida real. En general [11] examina cómo los estudiantes adquieren el concepto de función lineal a través de una ingeniería didáctica. En esta metodología, los estudiantes participan en modelación de situaciones contextualizadas. El objetivo principal es potenciar el

aprendizaje del concepto de función mediante la modelación de situaciones. Esto se logra a través de la confrontación entre las concepciones a priori y a posteriori de los estudiantes. Por último, En relación con la resolución de problemas, el artículo de [12] ahonda en las aportaciones y limitaciones de los enfoques de los siguientes tres autores. Por un lado, George Pólya propuso un método de cuatro pasos que incluye comprender el problema, calcular, diseñar un plan, ejecutar y revisar. Alan H. Schoenfeld, por su parte, identifica dimensiones clave como recursos cognitivos, estrategias heurísticas, creencias sobre las matemáticas y control de procesos. Finalmente, Frederick Reif se centró en abordar la resolución de problemas de física mediante dos reglas generales integradas en una estrategia de cinco etapas. Estas metodologías buscan promover un enfoque más reflexivo y consciente en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, fomentando el desarrollo del pensamiento crítico, la resolución de problemas y las habilidades metacognitivas para empoderar a los estudiantes hacia la independencia y el éxito académico.

El presente trabajo de investigación tiene en cuenta la metodología propuesta por [13], facilitándole al estudiante contar con una estructura para resolución de situaciones problema planteadas, siendo esto apropiado para fortalecer las competencias matemáticas de los estudiantes. George Pólya propone una estrategia para la resolución de problemas, la cual es ampliamente reconocida y utilizada en el campo de las matemáticas, aunque caber resaltar que no solo se emplea para resolver problemas matemáticos sino también problemas de la vida en general, entendiéndose como una manera de abordar los problemas de manera metódica y efectiva. El autor describe su estrategia en cuatro fases: Comprensión del problema, concepción de un plan, ejecución del plan y visión retrospectiva.

Materiales y Métodos

De acuerdo al objetivo general que se propone esta investigación: Desarrollar una estrategia didáctica que permita a los estudiantes comprender e identificar las aplicaciones de las razones trigonométricas contextualizadas, el tipo de investigación que mejor se ajusta es la investigación cualitativa, implementando la metodología de la investigación-acción. En la investigación cualitativa el investigador se encuentra inmerso en el contexto donde ocurre el proceso objeto de investigación, además su participación de alguna manera influye en las personas de las que se toma la información que posteriormente será analizada para lograr comprender el fenómeno que allí sucede [14]. De acuerdo a [15] la Investigación-Acción-Participativa (IAP) plantea abordar el estudio de las comunidades desde la interdisciplinariedad con criterios sociológicos, antropológicos, educativos, políticos, sin parcialidad alguna. Tiene sus orígenes en la lucha social con pretensiones liberadoras y emancipadora, en una visión multipolar, integradora y sintagmática, propone consideraciones que lo hacen propio de Latinoamérica. En tal razón, la aplicación del método IAP es contextualizado a la realidad de los pueblos latinoamericanos, pero exportado al mundo y a otras disciplinas como la educación, administración, politología y antropología.

En la investigación cualitativa realizada por [16] se analizan las experiencias de estudiantes de bachillerato al resolver una tarea de libro de texto y una tarea auténtica de trigonometría, lo cual proporciona información relevante para el diseño de estrategias didácticas efectivas en la enseñanza de este tema. Generalmente en la investigación cualitativa generalmente los participantes se seleccionan de manera intencional, por lo tanto, los informantes en el desarrollo de la investigación son ocho (8) estudiantes que se encuentran matriculados en el colegio Claudia María Prada, Sede Hermano Rodulfo Eloy, se encuentran cursando décimo grado y pertenecen al curso 1004, quienes fueron seleccionados por conveniencia a la investigación, al tratarse de un grupo de estudiantes que ha cursado cada grado con normalidad académica sin hacer parte de ningún modelo educativo flexible y aceptaron participar en esta investigación. Además, el compañerismo y la empatía con el docente investigador supone el desarrollo adecuado de las actividades de la propuesta de investigación, así como la recolección de opiniones verídicas por parte de los estudiantes. De acuerdo a lo expresado, la investigación se llevó a cabo en cuatro grandes fases:

Diagnóstico. Se trata de un cuestionario abierto que se aplica de manera individual con el fin de identificar las dificultades que se presenten los estudiantes tanto en la comprensión de los conceptos como en el procedimiento que realizan, ubicándolos en cierto nivel de dominio de saberes previos, y así mismo sirviendo como punto de partida para hacer un proceso efectivo de enseñanza aprendizaje de las razones trigonométricas.

Diseño. La estrategia didáctica comprende tres actividades que fueron diseñadas para el fortalecimiento progresivo de las dificultades que fueron encontradas en el diagnóstico aplicado previamente, hasta llegar a la adquisición del tema objeto de aprendizaje, que son las razones trigonométricas.

Aplicación. En esta fase se ejecutan las actividades que fueron planeadas en el diseño, en los tiempos establecidos y con los materiales destinados para ello. Es importante resaltar que cada una de las actividades se desarrolla en momentos, y a su vez cada momento está conformado por tareas que deben realizar los estudiantes.

Evaluación. La realización de una evaluación final constituye un componente indispensable en la educación, proporcionando una valiosa herramienta para medir el grado de comprensión y dominio que los estudiantes han logrado en ciertos temas, en este caso particular las razones trigonométricas, además esta evaluación también se convierte en un indicador clave de la eficacia de la estrategia didáctica aplicada [17].

Resultados y discusión

Análisis de los datos

El análisis de la información es un apartado que suma gran importancia a la investigación, pues en él se toman los datos recolectados para obtener explicaciones del fenómeno didáctico que acontece. En esta sección se tendrán en cuenta cada una de las grandes fases anteriormente mencionada que conforman el trabajo.

Diagnóstico. En el contexto de la enseñanza de las razones trigonométricas, la prueba diagnóstica se utiliza para evaluar el nivel de dominio de los estudiantes en los conocimientos previos necesarios para abordar la temática objeto de enseñanza. En consecuencia, esta fase responde al primer objetivo específico: Identificar los conocimientos previos y las habilidades que son necesarias para la comprensión de las razones trigonométricas.

La prueba diagnóstica, aplicada a 8 estudiantes mediante un cuestionario abierto, destaca dificultades en varios aspectos relacionados con la comprensión de conceptos matemáticos fundamentales. En cuanto a la clasificación de triángulos, la mayoría de los estudiantes identifican los triángulos rectángulos por tener un ángulo recto, pero algunos presentan confusiones entre la definición de triángulo rectángulo y equilátero, revelando dificultades para expresar conceptos en sus propios términos.

En relación con fórmulas y otros conocimientos matemáticos, se observan dificultades en la aplicación de la fórmula para calcular el área de un cuadrado, el teorema de Pitágoras y el concepto de razón. Se destaca el desconcierto que expresan los estudiantes, referente a la interpretación y aplicación del teorema de Pitágoras, así como limitaciones en recordar situaciones prácticas donde se podría aplicar. El conocimiento previo sobre razón y proporción muestra resultados mixtos, con algunos estudiantes respondiendo correctamente a problemas relacionados, mientras que otros expresan falta de comprensión o simplemente responden incorrectamente sin justificación. Además, en operaciones aritméticas básicas con números reales, algunos estudiantes muestran capacidad para realizarlas, pero otros demuestran estar en aprietos al tratar de distinguir entre números enteros y reales.

La percepción de las matemáticas varía entre los estudiantes, algunos simplemente las perciben como fórmulas abstractas con poca aplicación en la vida real, mientras que otros reconocen su utilidad en resolver situaciones cotidianas y laborales. La falta de atención, el tiempo limitado dedicado al aprendizaje y la frustración ante la imposibilidad de comprender son desafíos comunes en el proceso de aprendizaje, acentuando la importancia de abordar estos obstáculos en la enseñanza de la matemática, en especial de la trigonometría. En conclusión, los resultados de esta prueba diagnóstica indican la necesidad de abordar de manera efectiva conceptos fundamentales como: proporción y teorema de Pitágoras antes de introducir a los estudiantes en las razones trigonométricas. Las actividades a desarrollarse deben centrar en aclarar conceptos erróneos y proporcionar ejemplos prácticos para ayudar a los estudiantes a comprender la relevancia de estos conceptos en su vida cotidiana y en la resolución de problemas trigonométricos. Además, es importante promover la capacidad de los estudiantes para expresar y comunicar sus pensamientos de manera precisa y clara en términos matemáticos.

Diseño. El propósito de esta fase es responder al tercer objetivo específico: Diseñar una propuesta didáctica para que los estudiantes logren adquirir la destreza en la aplicación de las razones trigonométricas en situaciones problema. Esto a partir del refuerzo de los conocimientos previos necesarios, desarrollar poco a poco el concepto objeto de aprendizaje. En este orden de ideas, se plantean tres actividades secuenciales, que llevarán a la consecución, dominio y aplicación del aprendizaje propuesto tabla I.

Tabla I. Planificación de las actividades

Tema de la actividad	Propósito	Tareas
Teorema de Pitágoras	Fortalecer los conocimientos sobre el teorema de Pitágoras a través de elementos de desarrollo histórico, manipulativos y situaciones problema	Tiempo: 4 horas Materiales: Tijeras, colores, lápiz, borrador, calculadora, guía de trabajo. Inicio: Explicación del propósito y orientaciones. Desarrollo: Se les presentan desafíos de armar figuras, se proporciona un contexto histórico y finalmente se les pide solucionar problemas. Cierre: Consolidación del conocimiento adquirido.
Razón y Proporción	Fortalecer los conocimientos sobre razón y proporción a través de actividades a partir de la historia, manipulativos y situaciones problema	Tiempo: 4 horas Materiales: Botones, cinta métrica, calculadora, lápiz, borrador, guía de trabajo. Inicio: Explicación del propósito y orientaciones. Desarrollo: Se les proporciona material didáctico, se les pide realizar una lectura que resalta el componente histórico del tema que luego comprobaran con las medidas de su propio cuerpo, y por último se les pide solucionar problemas de aplicación. Cierre: Consolidación del conocimiento adquirido
Razones Trigonométricas	Comprender el significado de las razones trigonométricas y las aplicarlas para solucionar situaciones problema	Tiempo: 6 horas Materiales: Material didáctico, clinómetro, cinta métrica, calculadora, lápiz, borrador, guía de trabajo Inicio: Explicación del propósito y orientaciones. Desarrollo: Observan un video que los contextualiza históricamente, enseguida proceden a construir su propio concepto de razón trigonométrica. Cierre: Consolidación del conocimiento adquirido

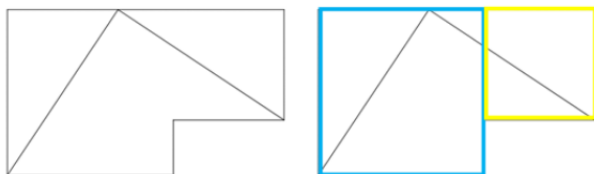
Aplicación

Luego del diseño sigue la fase de aplicación, en la que se ejecutan las actividades previamente planeadas, teniendo en cuenta los recursos necesarios para ello, y respetando el cronograma establecido para tal propósito. Es importante resaltar que cada una de las actividades se desarrolla en momentos, y a su vez cada momento está conformado por tareas. Al iniciar cada actividad se le explica el objetivo que se desea alcanzar, se dan orientaciones generales, y al finalizar cada guía se hace la "institucionalización" como situación didáctica; por su parte la ingeniería didáctica trabajada por [11] ofrece una perspectiva valiosa para diseñar estrategias didácticas efectivas en la enseñanza de las razones trigonométricas, permitiendo a los estudiantes explorar y comprender conceptos matemáticos de manera más profunda y contextualizada.

Actividad 1

La actividad se llevó a cabo en tres momentos, el primero de ellos plantea dos desafíos a los que implican la manipulación de tres piezas, se les pide acomodarlas cumpliendo ciertas condiciones y se les cuestiona sobre lo observado. Para concluir el primer momento se les proporciona a los estudiantes una hoja con un triángulo rectángulo, donde deben formar cuadrados a partir de los catetos y luego trocearlos para acomodar las piezas dentro del cuadrado formado por la hipotenusa figura 1.

Tarea 1: Se te entregaron 3 piezas (2 triángulos rectángulos iguales y 1 pieza pentagonal) acomodadas de la siguiente manera.



Fíjate muy bien en los dos cuadrados que se forman

1. ¿Qué relación existe entre los lados de los cuadrados y los catetos de la pieza que es un triángulo rectángulo?

Tarea 2: Se te ha entregado una hoja con un triángulo rectángulo dónde a partir de sus catetos e hipotenusa se forman cuadrados.

Debes trocear los cuadrados formados por los catetos y acomodar las piezas dentro del cuadrado formado por la hipotenusa.



Figura 1. Actividad 1

Para el segundo momento se propusieron dos tareas, la primera concerniente a la historia de los Babilonios y su demostración del teorema de Pitágoras a través de las famosas ternas pitagóricas; la segunda tarea se le pide que asuma el papel de Pitágoras y enuncie el teorema, esta actividad fue sencilla para ellos, las demostraciones anteriores los llevaron relacionar las áreas de los lados, con el área de la hipotenusa.

El tercer momento es una serie de problemas de aplicación del teorema de Pitágoras, en los que se les proponen situaciones contextualizadas aumentando progresivamente el nivel de dificultad.

Actividad 2

La actividad se llevó a cabo en tres momentos, el primero de ellos con dos tareas, ambas dirigidas a recordar el concepto de fracción. La primera tarea consistía en indicar la relación entre botones de diferente color y en la segunda les mostró la imagen de una pizza y se les solicitó responder algunas preguntas al respecto. El segundo momento se desarrolló en dos tareas, inicialmente se les proporciona una lectura acerca del "hombre de Vitruvio" y la manera en que Leonardo da Vinci propuso unas reglas en la que se juzgaba la belleza del cuerpo humano por medio de proporciones.

En la segunda tarea tomaron medidas de sus cuerpos para comprobar si cumplían con los "cánones" de belleza propuestos por Da Vinci. Finalmente, en el tercer momento de la actividad se implementaron dos tareas. La primera tarea se centró en el análisis de un texto sobre el antiguo matemático Tales de Mileto, tras la lectura, se les pidió a los estudiantes que respondieran a una serie de interrogantes diseñados para fomentar el análisis y la deducción de que se trataba de un teorema de semejanza. Para terminar, la última tarea consistió en presentar a los estudiantes una serie de situaciones que involucraban figuras geométricas y problemas contextualizados dentro de su entorno cotidiano figura 2.

Leonardo da Vinci: las mil y un maneras en las que el "Hombre de Vitruvio" revela que el artista italiano era un genio

Fue obra de Leonardo da Vinci, y su nombre es el "Hombre de Vitruvio".

Con él, se propuso capturar, a través de la ciencia y el arte -que para él eran una sola cosa- la perfección del cuerpo humano.

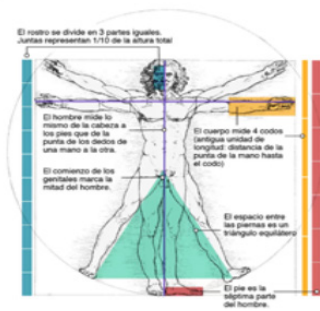
Pero en realidad es una respuesta a un antiguo problema arquitectónico sobre las proporciones relativas de edificios y hombres.

El desafío que plantea Vitruvio es colocar a un hombre boca arriba con los brazos extendidos y con los dedos de sus manos y de los pies toquen la circunferencia de un círculo cuyo centro es su ombligo.

Y también poner la misma figura dentro de un cuadrado.

El artista-científico presenta su estudio del "canon de las proporciones humanas", el otro nombre con el que se conoce esta obra. Si la palabra canon significa "regla", se entiende, pues, que Leonardo determinó en este trabajo las reglas que describen las proporciones del cuerpo humano, a partir de las cuales se juzga su armonía y belleza.

<https://www.culturagenial.com/es/hombre-de-vitruvio-leonardo-da-vinci/>



Tales de Mileto y la Gran Pirámide

Según un viejo relato, por esa época, un sabio griego llamado Tales de Mileto visitó Egipto. El faraón, quien estaba muy interesado en las medidas de las pirámides, le encomendó a Tales una importante tarea.

- Querido amigo, he escuchado que eres un gran sabio venido de Grecia y que tienes increíbles habilidades en el estudio de los objetos y sus medidas. Por eso quiero que nos digas cuál es la altura exacta de la Gran Pirámide - dijo el faraón.

Tales **aceptó** encantado. Estaba feliz de ver que su talento, por fin, estaba siendo reconocido. A lo largo de su vida había tenido que soportar las burlas de quienes consideraban que todas sus investigaciones y horas de trabajo estudiando las figuras, eran inútiles.

- De inmediato comenzaré a trabajar, faraón. Será un placer para mí poder servirle. Sólo necesito que me permita ir hasta la Gran Pirámide con algunos de sus hombres - respondió Tales. Así lo dispuso el faraón.

Cuando llegaron, Tales hizo dos marcas en el piso. La distancia entre ellas era igual a la longitud de su bastón. Luego apoyó el bastón en una de las marcas. Se paró junto a la Gran Pirámide y esperó. Sólo tenía que ser paciente y fijarse en el momento exacto en que el bastón y su sombra tuvieran la misma longitud. Los hombres del faraón estaban desconcertados. Parecía que Tales no estaba trabajando.

Sin embargo, cuando sus colaboradores ya estaban aburridos de tanto esperar, Tales de Mileto gritó emocionado:
- ¡Rápido, servidores del faraón, midan la longitud de la sombra de la pirámide! Luego regresen donde el faraón y díganle que esa es la altura de la Gran Pirámide.

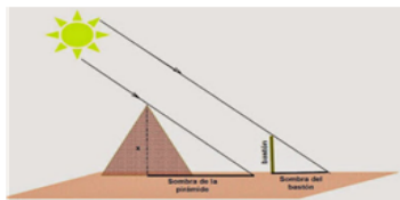


Figura 2. Actividad 2

Actividad 3

Esta actividad se lleva a cabo mediante tres momentos, en el primero de ellos se desarrollan tres tareas distintas. La primera tarea consistió en que los estudiantes observaran un video instructivo identificando las contribuciones de Eratóstenes en la medición de la circunferencia terrestre figura 3.



Figura 3. Actividad 3

En la segunda tarea, se proporcionó una exposición teórica sobre las razones trigonométricas, y posteriormente se instó a los estudiantes a derivar las fórmulas correspondientes, considerando la relación entre los catetos e hipotenusa según como correspondiera. Para la tercera tarea se les proporcionó un triángulo rectángulo de madera, y se les pidió hallar sus medidas haciendo uso de la cinta métrica y de una aplicación para medir ángulos, posteriormente se les pidió confrontar los valores de las razones trigonométricas con las medidas tomadas frente a los valores arrojados por la calculadora.

En el momento dos de la actividad, se les pidió calcular las razones trigonométricas para los ángulos notables principales (30° , 60° y 45°). Como ejercicios complementarios, se les propusieron problemas contextualizados para resolver. Finalmente, en el momento tres de la actividad, se llevaron a cabo dos tareas de campo. En la primera tarea, los estudiantes tuvieron que hallar la altura de un punto de difícil acceso mediante la aplicación de las razones trigonométricas, destacándose el uso del clinómetro para medir ángulos. En la última tarea, se les explicó la normativa que debía cumplir la construcción de rampas y se pidió a los estudiantes que identificaran las rampas en el colegio y las evaluaran para determinar si cumplían con dicha normativa

Evaluación. Mediante el análisis de las respuestas obtenidas a través de la aplicación de un cuestionario abierto, se dio respuesta al tercer objetivo específico de la investigación: Categorizar los conocimientos y las habilidades que poseen los estudiantes frente al aprendizaje de las razones trigonométricas. Dando como resultado las siguientes categorías y subcategorías tabla II.

Tabla II. Categorías y subcategorías

Categorías y subcategorías	
Categoría 1: Comprenden las características de un triángulo rectángulo	Subcategoría A: La principal característica de un triángulo rectángulo es su ángulo recto y los identifican en diferentes contextos
	Subcategoría B: Relacionan los triángulos rectángulos con el teorema de Pitágoras.
Categoría 2: Describen el enunciado del teorema de Pitágoras	Subcategoría A: Enuncian de manera correcta el teorema.
	Subcategoría B: Relaciona el teorema de Pitágoras con las razones trigonométricas.
Categoría 3: Reconocen situaciones en las que se puede usar el teorema de Pitágoras	Subcategoría A: Miden longitudes de difícil acceso.
	Subcategoría B: Asocian con ejercicios previos.
Categoría 4: Aplican el teorema de Pitágoras	Subcategoría A: Encuentra la incógnita.
	Subcategoría B: Unifican unidades.
Categoría 5: Comprender el concepto de razón y proporción	Subcategoría A: Halla la constante de proporcionalidad.
	Subcategoría B: Usan el teorema de Tales.
Categoría 6: Deducen el concepto de razones trigonométricas	Subcategoría A: Comprenden el concepto de razón trigonométrica.
	Subcategoría B: Reconocen la utilidad de las razones trigonométricas.
Categoría 7: Aplican las razones trigonométricas	Subcategoría A: Identificar la razón correcta
	Subcategoría B: Se les dificulta algunas operaciones aritméticas.
	Subcategoría C: Confunden términos.

Categoría 8: Crea un problema de razones trigonométricas a partir de una imagen	Subcategoría A: Usan la razón trigonométrica coseno.
	Subcategoría B: Usan la razón trigonométrica tangente.
	Subcategoría C: No ajustan las medidas a la realidad.
Categoría 9: Representan y solucionan una situación problema	Subcategoría A: Identificar el uso de la razón trigonométrica seno.
	Subcategoría B: Reconocen la facilidad de aplicar razones trigonométricas.
Categoría 10: Opinan sobre la estrategia didáctica	Subcategoría A: Encuentran aplicaciones a la vida cotidiana.
	Subcategoría B: Se divierten aprendiendo.
	Subcategoría C: No retienen a largo plazo.

Discusión

En esta etapa se destaca la eficacia de una estrategia didáctica, logrando la integración de los tipos de aprendizaje (de representación, de conceptos y de proposiciones) propuestos por Ausubel. La aplicación de esta estrategia condujo a avances notables de los estudiantes en cuanto a la identificación de triángulos rectángulos y el cálculo de áreas, evidenciando su efectividad en los resultados de la evaluación final [18]. La comparación de las teorías de [19], y [20], ofrece una perspectiva clave sobre el proceso de aprendizaje. La aplicación de éstas teoría a la estrategia didáctica revela un progreso significativo en la conexión y secuencia de conocimientos previos, especialmente en la comprensión y aplicación del teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas.

Lo propuesto por [21], sobre la importancia del aspecto social y cultural en el aprendizaje se reflejan en la participación activa y entusiasta de los estudiantes. Este cambio en la percepción de la aplicabilidad de las matemáticas demuestra la influencia positiva del estudio de Vygotsky en la enseñanza y el aprendizaje. La teoría de [22], que aboga por el aprendizaje a través del descubrimiento, se evidencia en la manera en que los estudiantes describieron el teorema de Pitágoras después de participar en actividades que les permitieron deducirlo por sí mismos. Esto respalda la idea de que construir sobre conocimientos previos facilita la adquisición de nuevos conceptos.

Por su parte, [9] resalta la relevancia de incorporar problemas del mundo real en la enseñanza de las matemáticas, así como la necesidad de abordar el conocimiento matemático desde una perspectiva histórico-cultural. Además, se hace hincapié en la importancia de superar la racionalidad estática y el predominio del cálculo aritmético y algebraico en la geometría escolar, y en su lugar, adoptar una racionalidad contextualizada dinámica-comparativa que permita a los estudiantes comprender y aplicar conceptos matemáticos en situaciones concretas. La adaptación de la estrategia didáctica para abordar estos estilos contribuye a un aprendizaje significativo y enriquecedor, mostrando la importancia de atender a la diversidad de los estudiantes. Desde la perspectiva de [11], las situaciones didácticas de acción, formulación y validación desempeñan un papel importante en la construcción del aprendizaje. Es posible lograr un aprendizaje efectivo de conceptos, donde los estudiantes desarrollen el pensamiento variacional al reconocer, percibir y caracterizar la variación y el cambio en diferentes contextos. Estas situaciones resultan efectivas para mejorar el rendimiento

de los estudiantes en la evaluación final y fomentar habilidades como el razonamiento, la comunicación y el pensamiento crítico.

Conclusiones

En coherencia con los objetivos de la investigación, se ha llegado a una serie de conclusiones que son fundamentales para comprender el alcance y la relevancia de la investigación:

La prueba diagnóstica fue la principal herramienta para determinar el nivel de dominio en los conocimientos previos de los estudiantes sobre triángulos, razón, proporción y el teorema de Pitágoras. Estos resultados permitieron a la investigadora diseñar la estrategia didáctica de manera efectiva, abordando las dificultades identificadas antes de introducir nuevos conceptos. La percepción de los estudiantes sobre la aplicabilidad de las matemáticas varía, y la falta de ejemplos de aplicaciones en la vida cotidiana por parte de los docentes influye en esta percepción. Por lo tanto, se debe resaltar la importancia de relacionar los conceptos matemáticos con situaciones concretas para que los estudiantes comprendan su relevancia en la vida cotidiana.

El diseño de actividades en la estrategia didáctica se basó en teorías educativas clave, como [20], [19], [21], [22], [11] y [9]. Estas actividades se centraron en abordar las dificultades previamente identificadas en los conocimientos de los estudiantes, fortaleciendo su comprensión de los conceptos claves necesarios para introducir el tema de las razones trigonométricas. La coherencia vertical en los estándares básicos de competencias respalda la progresión y continuidad del aprendizaje a lo largo de la formación académica del estudiante. La combinación de elementos históricos, contextuales y prácticos en las actividades resultó positiva para involucrar a los estudiantes y motivar su participación activa, promoviendo un aprendizaje significativo y duradero.

La evaluación final fue primordial para medir la efectividad de la estrategia didáctica y revelar el avance en la comprensión y dominio de las razones trigonométricas por parte de los estudiantes. Esta retroalimentación permite al docente ajustar y mejorar sus métodos de enseñanza, promoviendo un aprendizaje significativo y enriquecedor. La investigación responde a las preguntas del planteamiento del problema: ¿Cómo mejorar la comprensión de las razones trigonométricas? ¿Cómo lograr que los estudiantes apliquen efectivamente las razones trigonométricas? En consecuencia, la estrategia didáctica al ser gradual y progresiva, comenzando con el fortalecimiento de los fundamentos matemáticos, ha demostrado su efectividad para mejorar la comprensión de las razones trigonométricas, generando la participación activa de los estudiantes en actividades desafiantes, que fueron la clave para lograr un aprendizaje eficaz de las razones trigonométricas.

Referencias

- [1] Ministerio de Educación Nacional, Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. 2006. [En línea]. Disponible en: https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- [2] C. Hernández Cruz, "El Teorema de Pitágoras, Pretexto y Contexto para la Enseñanza de la Geometría", Tesis de Posgrado, Universidad Nacional de Colombia, 2019
- [3] Colegio Claudia María Prada. Información institucional. 2022. [En línea]. Disponible en: <https://colclama.edu.co/web/>
- [4] W. Méndez y S.V Leal, "La modelación matemática y los problemas de aplicación como promotores de la creatividad en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría", *Revista de Investigación*, vol. 42, núm. 94, p.p 1-15, 2018
- [5] M. Torres, Midiendo ángulos y razón trigonométrica, aprendizaje basado en la resolución de problemas de la vida cotidiana. Tesis de posgrado, Universidad Nacional de Educación, Bogotá, Colombia, 2018
- [6] M. Romero, El aprendizaje de la matemática y los procesos cognitivos en la solución de tareas con razones trigonométricas en la institución Pompilio Martínez de Cajicá, Colombia. Tesis de posgrado, Universidad Privada Norbert Wiener, Lima, Perú, 2018
- [7] N. Díaz Cortés y M Barrero, "Pequeños Científicos" Potenciando los Aprendizajes de la Trigonometría en Grado Décimo. Tesis de posgrado, Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia, 2018
- [8] G. Rodríguez y N. Sgreccia, "Predisposición y comprensión de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas trigonométricos," *Números*, vol. 108, pp. 119-148, 2021
- [9] L. Espinoza Ramírez, A.S. Vergara Gómez y D. Valenzuela Zúñiga, "Contextualización en matemáticas: uso del teorema del ángulo inscrito en la geometrización de la percepción visual", *Esperanza de las Ciencias*, vol. 38, no. 1, pp. 5-26, 2020. doi: 10.5565/rev/ensciencias.2418
- [10] C. Castro, J. Arteaga y L Ricaurte, Situaciones didácticas en la enseñanza de las razones trigonométricas en estudiantes de grado décimo. Tesis de posgrado, Universidad del Cauca, Valle del Guamuez, Colombia, 2018
- [11] L. P. Rico, "Fortalecimiento del pensamiento geométrico en los estudiantes de noveno 01 de la sede Monseñor Rafael Afanador y Cadena de la Institución Educativa Bethlemitas Brighton de Pamplona"

- [12] F. Cardona, A. Reyes-Rodríguez, M. Campos-Nava y C. Rodríguez, "Resolución de problemas en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas", *PADI Boletín Científico de Ciencias Básicas e Ingenierías del ICBI*, vol. 9, no. (Especial), pp. 10-17, August 2021
- [13] G. Pólya, *Cómo plantear y resolver problemas*, México: Trillas, 1989
- [14] R. Hernández, C. Fernández y P Baptista, *Metodología de la investigación*, México: McGraw-Hill, 2014
- [15] L. A. Velásquez, S. Y. Alvarado Mendoza y V. Barroeta Hidalgo, "Investigación-acción-participativa: alternativa metodológica para el estudio de las comunidades. La visión de Orlando Fals Borda", *Revista Científica*, vol. 6, no. 21, pp. 314-335, 2021. doi: 10.29394/Scientific.issn.2542-2987.2021.6.21.17.314-335
- [16] G. Téllez Vega, G. Nolasco Negrete, J. Juárez López y E. Juárez-Ruiz, "Experiencias de estudiantes de bachillerato al resolver una tarea de libro de texto y una tarea auténtica de trigonometría", *Números*, vol. 108, pp. 7-25, 2021
- [17] D. Stufflebeam y A Shinkfield, *Evaluación sistemática - Guía teórica y práctica*. Madrid: Ediciones Paidós Ibérica, 1995
- [18] D. Ausubel, J. Novak y H Hanesian, *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas, 1983
- [19] J. Piaget, *El nacimiento de la inteligencia del niño*, Barcelona: Aguilar, 1972
- [20] D. Ausubel, *Psicología educativa, "un punto de vista cognoscitivo*, México: Trillas, 1982
- [21] L. Vygotsky, *Pensamiento y Lenguaje.*, Buenos Aires: La Pléyade, 1981
- [22] J. Bruner, *El proceso de la educación*, México: UTEHA, 1963