

# Optimización Mediante Programación Dinámica de un Sistema de Producción: Caso Aluminio

## Dynamic Programming Optimization of a Production System: The Aluminum Case

**Recibido:** 8 de junio de 2022

**Aprobado:** 19 de noviembre de 2022

**Forma de citar:** C.A.Parra-Ortega, L.Jaimes-Cerveleón, L.E. Mendoza, "Optimización Mediante Programación Dinámica de un Sistema de Producción: Caso Aluminio", *Mundo Fesc*, vol. 13, no. S1, pp. 273-290, 2023. <https://doi.org/10.61799/2216-0388.1552>

**Carlos Arturo Parra-Ortega\*** 

Doctor en Ciencias Aplicadas  
carapa@unipamplona.edu.co  
Universidad de Pamplona  
Pamplona, Colombia

**Leonor Jaimes Cerveleón** 

Magister en Administración de Empresas e Innovación  
Leonor.cerveleon@unipamplona.edu.co  
Universidad de Pamplona, Pamplona  
Pamplona, Colombia

**Luis Enrique Mendoza** 

Magister en Ingeniería Biomédica  
Luis.mendoza@unipamplona.edu.co  
Universidad de Pamplona  
Pamplona, Colombia

**\*Autor para correspondencia:**  
carapa@unipamplona.edu.co



# Optimización Mediante Programación Dinámica de un Sistema de Producción: Caso Aluminio

## Resumen

Algunos procesos típicos de producción industrial manejan etapas bien definidas, cuyo resultado en tiempo y recursos depende de las decisiones que se tomen entre una etapa y otra. En el entorno actual donde es un imperativo la entrega de producto final en un tiempo pre establecido, se hace necesaria la optimización del tiempo de producción determinando las mejores decisiones posibles entre una etapa y otra en términos de parámetros y criterios de producción; obteniendo así las decisiones óptimas en cada etapa para lograr el mejor resultado global. Los conceptos de optimalidad aportados por Bellman en su programación dinámica es el insumo inicial para resolver problemas de esta naturaleza, enriquecido por otras técnicas tales como cadenas de Markov, Simulación estocástica y determinista, así como algoritmos computacionales. La aplicación de estas técnicas de optimización se realizó con los datos de un proceso de manufactura de láminas de aluminio, donde las etapas de fabricación están bien definidas, al igual que insumos y productos intermedios a obtener. Mediante simulación y la aplicación de la programación dinámica se logró demostrar que se puede obtener un menor tiempo de fabricación de láminas conociendo la configuración de la planta y los parámetros de operación en cada etapa del proceso. Como beneficio potencial de este trabajo, se establece que se pueden tomar mejores decisiones en cuanto a planificar la producción, o a una automatización de la misma aplicando la programación dinámica.

**Palabras clave:** Programación Dinámica, Sistema De Producción, Aluminio, Optimización De Procesos.

# Dynamic Programming Optimization of a Production System: The Aluminum Case

## Abstract

Some typical industrial production processes handle well-defined stages, whose result in time and resources depends on the decisions made between one stage and another. In the current environment where it is imperative to deliver the final product in a pre-established time, it becomes necessary to optimize the production time by determining the best possible decisions between one stage and another in terms of parameters and production criteria; thus, obtaining the optimal decisions at each stage to achieve the best overall result. The mathematical concepts provided by Bellman in his dynamic programming is the initial input to solve problems of this nature, enriched by other techniques such as Markov chains, stochastic and deterministic simulation, as well as computational algorithms. The application of these optimization techniques was carried out with data from an aluminum sheet manufacturing process, where the manufacturing stages are well defined, as well as inputs and intermediate products to be obtained. Through simulation and the application of dynamic programming, it was possible to demonstrate that a shorter sheet manufacturing time can be obtained by knowing the plant configuration and the operating parameters at each stage of the process. As a potential benefit of this work, it is established that better decisions can be made regarding production planning, or its automation by applying dynamic programming.

**Keywords:** Dynamic Programming, Production System, Aluminum, Process Optimization.

## Introducción

La producción de aluminio es una actividad industrial creciente, debido a que se utiliza en construcciones, industria aeronáutica y en nuestras actividades diarias. Sus propiedades de bajo peso, maleabilidad, conformabilidad y conductividad eléctrica hacen que sea imprescindible su uso. De acuerdo al tipo de producto final a obtener, existe un proceso para su obtención, con algunas variantes. El gobierno español estableció una ficha técnica donde describe el proceso, con el fin de controlar sus emisiones y que abarca desde el proceso extractivo a la obtención de aluminio metálico. No se está considerando en este documento el aluminio reciclado. Otros autores presentan un proceso más detallado [1], [2], [3]. Por simplificación, y concentrarse en aspectos de optimización numérica, se asumirá un proceso de fabricación de láminas de aluminio (precursor de producto final) de cuatro etapas: peletización, donde se separa el material alumínico de las rocas minerales (bauxita) a partir de un proceso químico y luego electrolítico, para obtener unas esferas de aluminio denominadas usualmente pellets. Luego viene la etapa de fundición, donde las esferitas de aluminio se calientan hasta que se funden, y se moldean para tomar la forma de una placa de aluminio. Esta placa aún caliente se pasa por máquina laminadora de cinco stands, hasta que se obtiene al final una lámina de aluminio. Por tal motivo, se denomina este proceso como laminación en caliente. Esta lámina se lleva a la sección de bodegaje para su enfriamiento, y posterior enrollamiento para luego distribuirse a los clientes que a su vez la utilizarán en otros procesos de manufactura.

El esquema del proceso se muestra en la figura 1, donde se muestra una distribución de máquinas que están disponibles para cada etapa: así, en la etapa de peletización hay dos unidades de producción para obtener los pellets. Hay cuatro hornos disponibles en la sección de horneado, dos grupos de stands de laminación, y dos bodegas para enrollar las láminas. Es necesario aclarar que cada una de las máquinas o unidades tiene características diferentes, de manera que los tiempos de proceso van a variar entre una etapa y la otra, dependiendo también de las características de las láminas a producir y la capacidad de la máquina. También conviene aclarar que la cantidad de máquinas asignada a cada proceso puede variar, de acuerdo a las capacidades de la planta. El objetivo es minimizar el tiempo de proceso, dado un tamaño inicial de lote, y considerando los efectos de utilizar una máquina determinada para cada etapa.

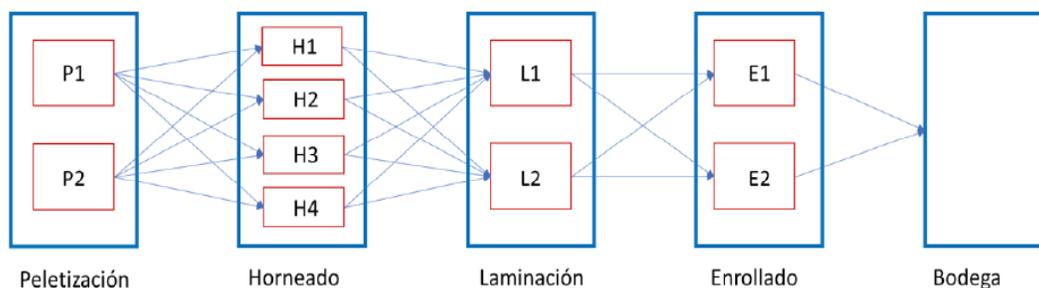


Figura 1. Esquema original del proceso

Cada máquina tiene características únicas, de manera que su tiempo de proceso depende del material que está procesando, el tiempo de ajuste o de preparación, y en el caso del horno, del tiempo en que se carga el material. Las siguientes suposiciones se toman para simplificar el problema y así solucionarlo con un método de optimización por etapas, como lo es la programación dinámica [4], [5] complementado con simulación estocástica y determinística [6], [7], [8].

Trabajos recientes relacionados con este tema se relacionan a continuación. Se propuso utilizar programación dinámica para minimizar costos en la atención de órdenes de pedido [9] cuando en dichas órdenes se hallan excesos de producción que llevan a costos extras por bodegaje. Un modelo matemático para la optimización de producción usando programación lineal y análisis de sensibilidad [10] se aplicó a la industria ladrillera. También se han realizado trabajos sobre control óptimo para etapas de producción e inventarios usando cálculo variacional y optimización de Pontryagin [11] así como el desarrollo de herramientas para evaluar procesos de manufactura en aluminio [12]. Optimización de sistemas discretos que se pueden llevar a control de procesos usando el método de relajación [13]. El uso de programación dinámica y lenguajes formales se aplicó al proceso de corte de una serrería en Colombia [14]. Una aplicación similar se propuso usando diseño de plantas esbeltas para programación de producción y su aplicación al sector de confecciones [15], al igual que una técnica semejante para calcular superficies de distribución de planta en el sector confecciones [16]. Finalmente, se aplicó programación dinámica con análisis de ciclos de vida para el reemplazo y mantenimiento de aires acondicionados de expansión directa [17].

### ***Supuestos iniciales***

Para facilitar su análisis y posterior ejemplo, se considerarán las siguientes simplificaciones:

- No existirá la posibilidad de solapar lotes.
- El tiempo más temprano de inicio del procesamiento de las piezas en una máquina siempre será mayor o igual que la de finalización de la última pieza del mismo lote en la etapa anterior, por lo tanto, cada lote completo se puede considerar como un trabajo único.
- No existirá la posibilidad de fraccionamiento de los lotes en los recursos existentes, se supone que esta opción ya se ha tenido en cuenta a la hora de definir el plan de fabricación.
- En el momento en que un lote se empieza a procesar en un recurso no se podrá interrumpir la operación hasta no haber terminado con las unidades que componen ese lote. Así mismo, no se considerarán paradas por malfuncionamiento de las máquinas. Todos los recursos necesarios estarán siempre disponibles.

- Entre cada etapa del sistema existe un almacén de capacidad ilimitada.
- Los tiempos de proceso y cambio de partida se suponen fijos y conocidos con anterioridad, y no dependen de la simultaneidad o no de estos cambios en varios recursos.
- Se sabe con antelación todos los trabajos a realizar en el Plan de Producción.
- No se consideran restricciones de mano de obra o materias primas.

### **Planteamiento problema de programación Dinámica**

El proceso se puede plantear como un problema de programación dinámica, de la siguiente manera:

$$f_n^* = \min_{u_n} \{r_n(x_n, u_n) + f_n^*(X_{n-1})\} \quad (1)$$

Donde:

- $n$  es la fase actual.
- $n-1$  es la fase anterior.
- $x_n$  es el estado del sistema en la fase actual.
- $x_{n-1}$  es el estado en la fase anterior.
- $f_n^*(x_n)$  es el costo en tiempo incurrido para cada alternativa, empezando por el estado  $x_n$  en fase  $n$  hasta el final.
- $f_n^*(X_{n-1})$  es el costo óptimo obtenido en la fase previa.
- $r_n(x_n, u_n)$  es el costo inmediato obtenido en la fase  $n$ , cuando la decisión  $u_n$  se realiza por un valor  $x_n$  de las variables de estado.
- $u_n$  es la decisión tomada en la etapa  $n$ .
- $tp_j$  es el tiempo de proceso en la máquina  $j$ .
- $ta_j$  es el tiempo de ajuste en la máquina  $j$  para llevar a la siguiente máquina.

La expresión para el costo inmediato en tiempo es:

$$r_n = \sum (tp_j + ta_j) \quad (2)$$

El esquema de la figura 2 muestra el proceso como una secuencia dinámica.

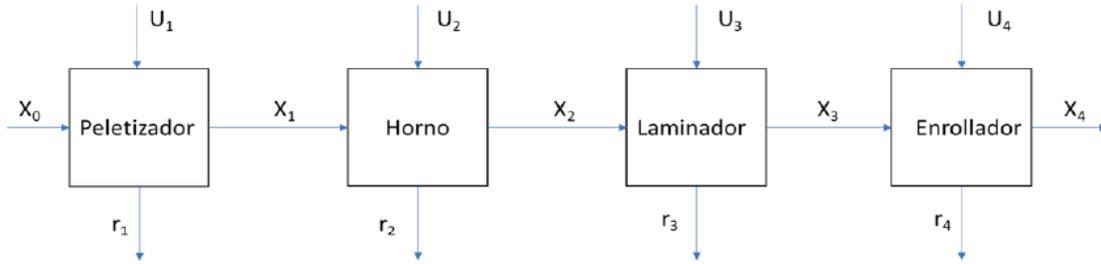


Figura 2. Secuencia dinámica simplificada del proceso de fabricación de rollos de aluminio.

A continuación, se proporcionan detalles sobre cada etapa del proceso de producción, así como las capacidades específicas de cada máquina o unidad de producción.

### Etapa de Peletización

Esta es la primera fase del proceso de fabricación. Primero entra a la máquina la bauxita, que contiene aluminio en estado mineral. Estos cuerpos entran a un proceso químico para obtener alúmina ( $Al_2O_3$ ) y luego a un proceso electrolítico para separar las partes metálicas, y salen porciones esféricas denominadas pellets o pellas. En detalle, estos procesos se describen en otros trabajos [18], [19]. Estos pellets conforman la materia prima del siguiente proceso de horneado. Como hay diferentes tipos de horno, se requieren diferentes tipos de pellets para este proceso. La diferencia está en el tiempo de cribado, de manera que para los hornos de menor rendimiento se requiere enviar pellets de menor tamaño, por tal motivo el tiempo de cribado es mayor. La tabla 1 resume las características de este proceso.

Tabla I. Características de las unidades de producción en el proceso de peletización.

Peletizadora	T func (s)	Criba gas (seg/Kg)	Criba gas	Criba elem 1	Criba elem 2
1	1800	6	6.6	5.5	5.25
2	3600	4	4	3.75	3.25

Para cada unidad de peletización y cribado, y  $K$  kilogramos a obtener de metal, el tiempo de proceso total se puede calcular de la siguiente manera:

$$t_{proc} = t_{func} + (K \times t_{criba}) \quad (3)$$

### Etapa de horneado

Esta es la segunda fase del proceso industrial. Aquí se asumen cuatro hornos con características diferentes, pero con una finalidad común: fundir los pellets para obtener una placa de aluminio fundido, para laminarlo posteriormente. Una expresión sencilla que relaciona el calor necesario para fundir el aluminio es la siguiente:

$$Q = K \int_{T1}^{T2} cdT \quad (4)$$

Donde Q es la cantidad de calor requerida, en Joules. K es la masa de metal a fundir, T1 es la temperatura ambiente, y T2 es la temperatura de fusión del aluminio (660 °C), c es su calor específico (0.215 cal/g °C). Un análisis más detallado teniendo en cuenta otras variables en la expresión se elaboró desde el punto de vista energético [20] al igual que una simulación numérica [21]. Para efectos de esta simulación, se supondrá que c es constante, de manera que la fórmula anterior pueda re-escribirse como:

$$Q = K \times c \times (T2 - T1) \quad (5)$$

Las dimensiones de molde de la placa son de 10cm de espesor, y 1.5m de ancho, de manera que para calcular la longitud resultante de la placa a partir de los kilogramos fundidos se calcula así:

$$L_{planchon} = \frac{K}{\delta \times 0.1 \times 1.5} \quad (6)$$

Donde  $\delta$  es la densidad del aluminio: 270 kg/m<sup>3</sup>. Puesto que ya se tiene el calor necesario para fundir una masa de metal, se revisan las capacidades de los hornos industriales para proporcionar calor. Generalmente esta capacidad viene dada en Kilocalorías por minuto, para mayor simplicidad con las unidades en que se está trabajando, se expresará en Joules por segundo. La tabla 2 muestra las capacidades caloríficas de los cuatro hornos, y el tiempo necesario para desmoldear el planchón e instalarlo en una de las dos laminadoras, que como tienen características diferentes, presentan tiempos diferentes para instalación (setup).

Tabla II. Características específicas de los hornos de fundición

Horno	Capacidad (J/s)	Tdesmolde(seg)	Tensamble(seg)
1 (gas)	279066	120	300
2 (gas)	293020	360	420
3 (eléctrico)	223253	300	120
4 (eléctrico)	230230	240	360

El tiempo de proceso se calcula como la cantidad de calor requerida para fundir los K kg de pellets dividida por la capacidad de cada horno, como se muestra en la siguiente expresión:

$$t_{proc} = \frac{Q}{C_{horno}} \quad (7)$$

### Etapa de Laminado

Cuando ya se tiene la placa de aluminio caliente se pasa por las máquinas de laminación, cuyo esquema base se muestra en la figura 3, basado en descripciones de su proceso [22] y en trabajos de simulación [23]. Se asumirá que la placa no pasa por el horno para recalentar, de manera que solamente pasará por los rodillos cuatro o cinco veces, dependiendo de si la máquina enrolladora (siguiente etapa) tiene capacidad para trabajar con lámina caliente o fría. Esta sección de laminado tiene una velocidad para procesar al planchón, que se mide en mm/seg. Sus capacidades se resumen en la Tabla III, pasando los mm a metros.

Tabla III. Capacidades específicas de las laminadoras.

Laminadora	Velocidad (m/s)	ta 4 pasadas (s)	Ta 5 pasadas (s)
1	0.0005	750	450
2	0.0006	600	1200

El esquema de un stand de máquina laminadora se muestra en la figura 3. Algunas máquinas pueden tener 4 o 5 stands, de acuerdo a sus características técnicas.

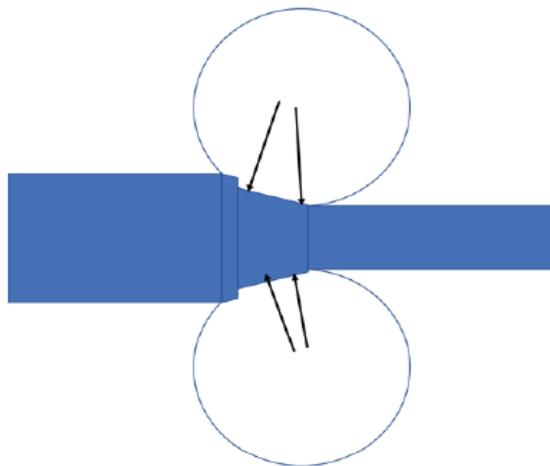


Figura 3. Stand para laminado en caliente.

Suponiendo que las laminadoras están diseñadas para trabajar con una placa de 1.5m de ancho, la longitud resultante de la lámina se puede calcular a partir de la conservación del volumen de la placa, teniendo en cuenta que su espesor final será de 0.5 mm.

$$L_{lam} = \frac{L_{planchon}}{0.005} \quad (8)$$

El tiempo de laminado se calcula dividiendo la longitud del planchón por la velocidad de operación de la laminadora. Este tiempo se suma al de preparar las 4 o 5 pasadas, dependiendo de hacia cual máquina de enrollado se dirigirá después la lámina.

$$t_{lam} = \frac{L_{planchon}}{Vel_{lam}} \quad (9)$$

### Etapa de enrollado

Esta es la etapa final del proceso de aluminio, cuando se recibe una lámina y se enrolla para su posterior almacenamiento en bodega. Cuando entra una lámina de dimensiones  $L \times 2 \times 0.005$  (longitud, ancho, espesor) esta se enrolla por medio de una máquina con especificaciones estándar las cuales tienen en cuenta aspectos tales como momento de inercia, esfuerzo máximo, radio de curvatura y relación de transmisión para determinar expresiones matemáticas [24]. Un estudio más preciso en el tiempo de operación para enrollado de máquinas tuvo en cuenta estos parámetros mecánicos [25]. Así las cosas, se asume en la configuración de esta planta que la máquina 1 puede enrollar cualquier lámina a razón de unos 3.3 cm/seg, mientras que la máquina 2 enrolla una lámina a 5 cm/seg. El tiempo de ajuste de la máquina 1 es de 10 minutos, para cualquier tipo de lámina, mientras que la máquina 2 debe esperar 1 hora para que se enfríe la lámina que sale aún caliente de cualquier máquina laminadora. El tiempo de proceso es entonces la siguiente expresión:  $tp = L/Velmaq + ta$ . Las capacidades de las máquinas para llevar a cabo esta labor se pueden resumir en la Tabla IV:

Tabla IV. Capacidades de las máquinas enrolladoras

Máquina	tp (seg)	Ta (seg)
1 (fría)	$L_{lamina}/0.033$	600
2 (caliente)	$L_{lamina}/0.05$	3600

### Casos de estudio

La mejor manera de observar la aplicación de los algoritmos de Programación Dinámica es la de probar sus resultados por medio de un ejemplo. Lo que se quiere minimizar es el tiempo de fabricación. Dado que la mayoría de estos tiempos en cada etapa dependen de la cantidad de material que entra al proceso (en Kg o en longitud), se requiere examinar varios casos en que se introduce más o menos material. La expresión general para la optimización es:

$$f^*(S) = \text{Min} \{x_n f_n(S, X_n)\} = f_n(S, X_n^*)$$

$$f_n(S, X_n) = t_{proc,S} + f_{n+1}^*(X_n) \quad (10)$$

Donde  $t_{proc}$  es el gasto de tiempo inmediato en procesar el insumo y llevarlo a la siguiente etapa.  $f_{n+1}^*(X_n)$  es el mínimo tiempo que se tomará en el futuro (en la etapa  $n+1$  en adelante).

**Ejemplo 1. Proceso de 2000 kg inicial.**

Suponiendo una orden de producción pequeña, lo primero que se hace es armar las tablas de tiempos de proceso en cada etapa, y luego aplicar el procedimiento de solución hacia atrás, a partir de la última etapa. La cantidad de insumos requeridos en la primera y segunda etapa es la misma: 2000 Kg de metal en estado nativo en la primera, para obtener 500 kg de pellets en la segunda. Para hallar las longitudes del planchón y la lámina se aplican sucesivamente las ecuaciones (6) y (8). Los insumos requeridos se muestran en la Tabla V:

**Tabla V.** Insumos y productos parciales para cada etapa.

Kg inicial	Kg pellets	Long placa	Long lámina
2000	500	0.427 m	85.47 m

Aplicando la ecuación (3) a los Kg a obtener se obtiene la tabla 6, la cual muestra el tiempo requerido de proceso de las unidades peletizadoras más el tiempo de cribado para llevar a cada uno de los hornos.

**Tabla VI.** Tiempo de proceso para obtener los pellets de Aluminio.

Peletizadora	Horno 1	Horno 2	Horno 3	Horno 4
1	4800	5100	4550	4225
2	5600	5600	5475	5225

En la etapa de horneado se aplica la ecuación (5) y luego la (7) para armar la Tabla VII, que muestra el tiempo de proceso de cada horno, incluyendo el desmoldeado para cargar en cada una de las dos máquinas laminadoras.

**Tabla VII.** Tiempo de proceso de cada horno con destino a laminadora específica.

Horno	tp a laminadora 1	tp a laminadora 2
H1	1273.669	1453.669
H2	1458.730	1518.730
H3	1742.085	1562.085
H4	1638.384	1758.384

Para calcular la tabla de tiempos del proceso de laminado, se aplica la ecuación (9) y se suman los tiempos para ajustar el stand de laminación a 4 o 5 pasadas, según la máquina de enrollado hacia donde se dirigirá posteriormente. La Tabla VIII muestra esos tiempos.

**Tabla VIII.** Tiempo de laminado con destino a cada enrolladora.

Laminadora	Enrolladora 1	Enrolladora 2
1	1604.700	1307.700
2	1312.250	1912.250

Finalmente, se establece la tabla de tiempos para la última etapa, donde se contabiliza el tiempo de proceso que depende de la longitud de la lámina y se muestra en la Tabla IX.

**Tabla IX.** Tiempo de enrollado para cada una de las enrolladoras.

Enrolladora	tp
1	3190
2	5309.4

**Proceso de solución hacia atrás**

Dado que el destino final (la bodega) se alcanza al final de la cuarta etapa, entonces  $f^*_5(\text{bodega})=0$ . El objetivo es hallar  $f^*_1(\text{peletizadora})$  y su ruta correspondiente. Cuando al proceso le resta una etapa, su ruta estará determinada por el estado actual (enrolladora 1 o 2) y el destino final  $X_4=\text{bodega}$ .

Luego  $f_4(S, X_n) = t_{\text{proc}, S} + f^*_5(\text{bodega})$ . El tiempo inmediato es aquel que toma completar la etapa, desde una máquina en una etapa hacia otra máquina en la etapa que sigue. La Tabla X muestra los resultados parciales.

**Tabla X.** Tiempos de proceso paso de etapa 4 a 5.

X4	tinmediato	topt(futuro)	Total	X5
E1	3190	0	3190	Bodega
E2	5309.4	0	5309.4	Bodega

En la etapa 3, quedan dos etapas por procesar. Suponiendo que se empieza por cada máquina, los resultados parciales están en la Tabla XI:

**Tabla XI.** Tiempos de proceso paso de etapa 3 a 4.

X3	tinmediato	topt(X4)	Total	X4
L1E1	1604.7	3190	4794.7	E1
L1E2	1304.7	5309.4	6614.1	
L2E1	1312.25	3190	4502.25	E1
L2E2	1912.25	5309.4	7221.65	

Obsérvese que, partiendo de ambas laminadoras, el menor tiempo de proceso se da cuando se utiliza la máquina enrolladora 1, de manera que la ruta seleccionada es E1. En la etapa 2 se repite el mismo proceso, y se obtiene la tabla 12. El camino óptimo de la ruta X3 va a ser el que lleve a la máquina E1, o sea L1E1 y L2E1, con valores de 4794.7 segundos y 4502.25 segundos, respectivamente. La tabla en cuestión se muestra a continuación:

**Tabla XII.** Tiempos de proceso paso de etapa 2 a 3.

X2	tinmediato	topt(X3)	Total	X3
H1L1	1273.66	4794.7	6068.37	
H1L2	1453.66	4502.25	5955.92	L2
H2L1	1458.73	4794.7	6253.43	
H2L2	1518.73	4502.25	6020.94	L2
H3L1	1742.08	4794.7	6536.78	
H3L2	1562.08	4502.25	6064.33	L2

H4L1	1638.38	4794.7	6433.08	
H4L2	1758.38	4502.25	6260.63	L2

El menor tiempo de proceso se da cuando a partir de cualquier horno, se selecciona la laminadora 2. Repitiendo el proceso para la etapa de peletizado (la primera), y seleccionando como valor de ruta mínima el tiempo mínimo de cada horno que se dirige a laminadora 2, se obtiene la Tabla XIII:

Tabla XIII. Tiempos de proceso de etapa 1 a 2.

X1	tinmediato	topt(X3)	Total	X2
P1H1	4800	5955.92	10755.92	
P1H2	5100	6020.98	11120.98	
P1H3	4550	6064.33	10614.33	H3
P1H4	4425	6260.63	10685.63	
P2H1	5600	5955.92	11555.92	
P2H2	5600	6020.98	11620.98	
P2H3	5475	6064.33	11539.33	
P2H4	5225	6260.63	11485.63	H4

Puede observarse que el menor tiempo de proceso acumulado es de 10614.33 segundos, lo que equivale a poco más de tres horas. La ruta que lleva a ese menor tiempo es: peletizadora 1, horno 3, laminadora 2 y enrolladora 1.

Tabla XIV. Insumos y productos parciales para ir de una etapa a otra.

Kg roca metálica	Kg pellets	Long planchón	Long lámina
13600	3400	2.90 m	581.198 m

Aplicando las ecuaciones a los insumos para hallar los tiempos de proceso y de ajuste para la siguiente etapa, se tiene como punto de partida las siguientes tablas que representan cada etapa.

### Etapa de peletización

Tabla XV. Tiempos de proceso etapa de peletización.

Peletizadora	Horno 1	Horno 2	Horno 3	Horno 4
1	22200	24240	20500	19650
2	17200	17200	16350	14650

### Etapa de horneado

Tabla XIV. Tiempos de proceso etapa de horneado.

Horno	$t_p$ a laminadora 1	$t_p$ a laminadora 2
H1	7964.95	8144.95
H2	7831.36	7891.36

H3	10106.18	9926.18
H4	9749.01	9869.01

### Etapa de laminación

Tabla XV. Tiempos de proceso laminación.

Laminadora	Enrolladora 1	Enrolladora 2
1	6561.96	6261.96
2	5443.3	6043.3

### Etapa de enrollado

Tabla XVI. Tiempos de proceso de enrollado.

Enrolladora	$t_p$
1	18212.01
2	15223.93

### Proceso de solución hacia atrás

Dado que el destino final (la bodega) se alcanza al final de la cuarta etapa, entonces  $f_5^*(\text{bodega})=0$ . El objetivo es hallar  $f_1^*(\text{peletizadora})$  y su ruta correspondiente. Cuando al proceso le resta una etapa, su ruta estará determinada por el estado actual (enrolladora 1 o 2) y el destino final  $X_4 = \text{bodega}$ .

Luego  $f_4(S, X_n) = t_{\text{proc},S} + f_5^*(\text{bodega})$ . Las siguientes tablas muestran los resultados parciales en cada etapa.

### Etapa 4. Enrollado

Tabla XVII. Tiempos de proceso etapa 4 a 5.

$X_4$	$t_{\text{inmediato}}$	$t_{\text{opt}}(\text{futuro})$	Total	$X_5$
E1	18212.01	0	18212.01	Bodega
E2	15223.93	0	15223.93	Bodega

### Etapa 3. Laminado

Tabla XVIII. Tiempos de proceso etapa 3 a 4.

$X_3$	$t_{\text{inmediato}}$	$t_{\text{opt}}(X_4)$	Total	$X_4$
L1E1	6561.96	18212.01	24773.98	
L1E2	6261.96	15223.93	21485.89	E2
L2E1	5443.3	18212.01	23655.32	
L2E2	6043.3	15223.93	21267.23	E2

## Etapa 2. Horneado

**Tabla XIX.** Tiempos de proceso paso de etapa 2 a 3.

$X_2$	$t_{\text{inmediato}}$	$t_{\text{opt}}(X_4)$	Total	$X_3$
H1L1	7964.95	21485.89	29450.85	
H1L2	8144.95	21267.23	29412.19	L2
H2L1	7831.36	21485.89	29317.26	
H2L2	7891.36	21267.23	29158.6	L2
H3L1	10106.18	21485.89	31592.08	
H3L2	9926.18	21267.23	31193.42	L2
H4L1	9749.01	21485.89	31234.91	
H4L2	9869.01	21267.23	31136.24	L2

## Etapa 1. Peletizado

**Tabla XX.** Tiempos de proceso paso de etapa 1 a 2.

$X_1$	$t_{\text{inmediato}}$	$t_{\text{opt}}(X_2)$	Total	$X_2$
P1H1	22200	29412.19	51621.19	
P1H2	24240	29158.6	53398.6	
P1H3	20500	31193.42	51693.42	
P1H4	19650	31136.24	50786.24	H4
P2H1	17200	29412.19	46612.19	
P2H2	17200	29158.6	46358.6	
P2H3	16350	31193.42	47543.42	
P2H4	14650	31136.24	45786.24	H4

Puede observarse que el menor tiempo de proceso acumulado es de 45786.33 segundos, lo que equivale a más de 12 horas. La ruta que lleva a ese menor tiempo es: peletizadora 2, horno 4, laminadora 2 y enrolladora 2. Utilizando simulación, y variando solamente la cantidad de Kg de entrada, se obtuvieron las siguientes rutas, luego de armar las tablas de tiempos y de optimizar aplicando Programación Dinámica.

**Tabla XXI.** Rutas óptimas a partir de la cantidad inicial a procesar.

Cantidad	Peletizadora	Horno	Laminadora	Enrolladora
13600 Kg	2	4	2	1
2000 Kg	1	4	2	1

## Conclusiones

A partir de los resultados obtenidos mediante la experimentación, se demostró que la Programación Dinámica junto con la simulación son necesarias para resolver problemas de producción por fases, aplicando el principio de optimalidad de Bellman, que establece que dado un estado actual, la política óptima desde este estado es independiente de las políticas escogidas en las etapas anteriores. Se logró aplicar al proceso de rollos de aluminio a partir de su forma original, y observar rutas que permiten optimizar el tiempo

de proceso.

En problemas de producción cuyas etapas dependen de varios parámetros, y los cuales se relacionan matemáticamente de una etapa a la otra, la combinación de técnicas de Programación Dinámica con simulación de escenarios permite explorar un mayor espacio de variables paramétricas, pero ir seguro a un resultado que minimice algún tipo de costo.

## Referencias

- [1] J. Lema, P. Moreno y E. Llanes. "Características del proceso de conformado en láminas de Aluminio de la serie 6000". *Polo del Conocimiento*, vol. 5, no. 9, pp. 03-21, sep 2020.
- [2] A. Echavarría y G. Orrego, "Metalurgia básica de algunas aleaciones de aluminio extruídas o laminadas", *Revista colombiana de materiales*. No. 2, pp. 32-51, feb 2012.
- [3] J. Barbosa, I. García y J. Fuentes. "Estimación vía experimental de la formabilidad de láminas de aluminio de pureza comercial". *Revista Latinoamericana de Metalurgia y Materiales*, vol. 29, no. 2, pp. 128-134, dic 2009.
- [4] R. Bellman. *Dynamic Programming*. Princeton: Oxford University Press, 2010.
- [5] J. Fonollosa, J. Sallán, V. Fernández y A. Suñé. *Programación Dinámica. Métodos Cuantitativos para la toma de decisiones*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya. 2016.
- [6] B. Zeigler, A. Muzy y E. Kofman. *Theory of Modeling and Simulation: discrete event & iterative system computational foundations*. Cambridge: Academic Press, 2019.
- [7] A. Law. *Simulation Modeling and Analysis*. Tucson: McGraw-Hill, 2015.
- [8] J. Banks, J. Carson, B. Nelson y D. Nicol. *Discrete-Event System Simulation*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2010.
- [9] G. Lezcano, Y. Vásquez, S. López y J. Cano. "Programación dinámica aplicada al análisis de inventario para atender órdenes de pedido", *Efectivo*, no. 36, pp. 59-74. Jul 2022.
- [10] J. Silva, W. Palacios y A. Caicedo. "Propuesta de un modelo matemático para la optimización de la producción. Una aplicación en la industria ladrillera de San José de Cúcuta", *Mundo FESC* vol. 13, no. 25, pp. 78-90, ene 2023.
- [11] O. Cepeda y L. Jiménez. Modelo de control óptimo para el sistema Producción-Inventarios. *Ingeniería Industrial. Actualidad y Nuevas Tendencias*, vol V, no. 16, pp.

35-44, jun 2016.

- [12] J. Bedoya. *Desarrollo de una herramienta en Excel para la evaluación de procesos de manufactura de productos de aluminio utilizando un enfoque de sostenibilidad*. Tesis de maestría en gestión energética industrial. Instituto Tecnológico Metropolitano, 2014.
- [13] J. Calvet, J. Cardillo, J. Hennes y F. Szigeti, "Method of relaxation applied to optimization of discrete systems", conference 13 in Colloquium on Differential Equations and Applications., (Maracaibo), pp. 13-19, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2003.
- [14] M. Gutiérrez, *Optimización del proceso de corte de una serrería mediante programación dinámica y lenguajes formales*. Tesis de Ingeniería Mecatrónica Universidad Tecnológica de Pereira, 2016.
- [15] S. Cáceres, *Modelo para la programación de la producción en enfoques de celdas de manufactura, integrando el diseño de plantas esbeltas, para el caso del sector de la confección de prendas de vestir*. Tesis de Maestría en Ingeniería Industrial Universidad Nacional. Medellín, 2021.
- [16] L. Vega, R. Monroy y Y. Romero. "Determinación de las constantes 'K' del método Guerchet para el cálculo de las superficies de distribución de planta para una empresa del sector confecciones en el área metropolitana de Cúcuta", *Mundo FESC* vol. 12 No. 24, pp. 212-225, jul 2022.
- [17] A. Brugés y C. Duarte. *Efecto de políticas de reemplazos y mantenimiento de aires acondicionados de expansión directa basados en programación dinámica y análisis de ciclo de vida de activos*. Tesis de maestría en Ingeniería Administrativa. Universidad del Norte, Barranquilla, 2019.
- [18] A. Di Prinzio y Y. Lee, "Preparación y caracterización de soportes catalíticos esféricos de  $\gamma$ -alúmina", *Revista de la Facultad de Ingeniería Universidad Central de Venezuela*, vol. 23 no 4, pp. 47-54, mayo 2008.
- [19] L. Carballo y H. Galindo, "Estudio de los procesos sol-gel para la obtención de un aglutinante apropiado para el peletizado de alúmina", *Revista Ingeniería e Investigación Universidad Nacional*, no. 48, pp. 57-63, dic 2001.
- [20] J. Morales. *Análisis energético en el proceso de fundición del aluminio*. Tesis de maestría en electromecánica. Latacunga: Universidad técnica del Cotopaxi, 2021.
- [21] W. Delgado y B. Uyaguari. *Análisis termodinámico del proceso de fundición en un horno de crisol mediante simulación numérica*. Proyecto de investigación Ingeniería Electromecánica. Latacunga: Universidad del Cotopaxi, 2023.

- [22] W. Hufnagel y P. Coca. Manual del Aluminio segunda edición. Barcelona: Editorial Reverté, 2015.
- [23] G. Lugo, M. Suarez y D. Flores, "Análisis numérico del proceso de laminado de aluminio", no. 7 in Congreso científico tecnológico de ingeniería mecánica, eléctrica industrial y telecomunicaciones, (Cuautitlán), pp. 1-5. Facultad Estudios Superiores Cuautitlán, 2022.
- [24] R. Budynas y J. Nisbett. Diseño en ingeniería mecánica de Shigley octava edición. México D. F.: McGraw-Hill, 2008.
- [25] D. Mejía. Estudio del proceso de rolado de láminas metálicas y su incidencia en el tiempo de operación en la fabricación de tanques inoxidable en la empresa Inox-Tec en la ciudad de Latacunga. Tesis de Ingeniería mecánica. Latacunga: Universidad técnica del Cotopaxi, 2011.