

# Análisis de las dialécticas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en una Actividad de Estudio e Investigación sobre la calidad del aire en un curso de Álgebra Lineal

Analysis of the dialectics of the Anthropological Theory of Didactics in a Study and Research Activity on air quality in a Linear Algebra course

**Recibido:** 13 de septiembre de 2025

**Aprobado:** 20 de diciembre de 2025

**Cómo citar:** F. R. Alvarez Macea, C. A. . Dávila-Carrillo, and C. A. . Hernández Suárez, "Análisis de las dialécticas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en una Actividad de Estudio e Investigación sobre la calidad del aire en un curso de Álgebra Lineal", Mundo Fesc, vol. 15, no. 33, pp 361-378 Sep. 2025, doi: 10.61799/2216-0388.1974.

## Fermín Álvarez-Macea<sup>1\*</sup>



Doctor en Ciencias de la Educación,  
E-mail: fermin.alvarez@udea.edu.co,  
Orcid: 0000-0002-2451-9144,  
Universidad de Antioquia, Antioquia, Colombia

## Cesar Augusto Dávila-Carrillo<sup>2</sup>



Mg. En Educación Matemáticas,  
E-mail: cesaraugustodc@ufps.edu.co,  
Orcid: 0000-0003-1376-2832,  
Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia

## César Augusto Hernández Suárez<sup>3</sup>



Doctor en Educación,  
cesaraugusto@ufps.edu.co,  
<https://orcid.org/0000-0002-7974-5560>,  
Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta, Colombia.

\*Autor para correspondencia:  
fermin.alvarez@udea.edu.co



# Análisis de las dialécticas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico en una Actividad de Estudio e Investigación sobre la calidad del aire en un curso de Álgebra Lineal

## Resumen

La enseñanza del Álgebra Lineal en ingeniería sufre una persistente descontextualización, un fenómeno que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) describe como la "monumentalización del saber". Este estudio aborda dicha problemática mediante el análisis de la implementación de una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) sobre la calidad del aire en un curso de Álgebra Lineal para 38 estudiantes de ingeniería en Colombia. El objetivo fue analizar la emergencia y caracterización de las nueve dialécticas de la TAD como motor del proceso de aprendizaje. A través de un diseño de estudio de caso cualitativo, se recopiló y analizaron 18 horas de video, producciones estudiantiles y un diario de campo del investigador-docente. Los hallazgos revelan una clara jerarquía en la manifestación de las dialécticas: un grupo de alta frecuencia (Estudio-Investigación, Individuo-Colectivo) impulsó la gestión procedimental de la tarea, mientras que un grupo de baja frecuencia (Análisis Praxeológico-Didáctico, Cajas Negras-Claros) evidenció la dificultad de promover una reflexión epistemológica profunda sobre el conocimiento matemático. Se concluye que, si bien la AEI es un dispositivo potente para activar la modelización matemática en contextos auténticos, la emergencia de una reflexión meta-praxeológica no es automática y requiere de un andamiaje didáctico intencionado por parte del docente para transformar el contrato didáctico.

**Palabras clave:** Actividad de estudio e investigación, álgebra lineal, formación de ingenieros, dialécticas didácticas, modelización matemática, teoría antropológica de lo didáctico.

# Analysis of the dialectics of the Anthropological Theory of Didactics in a Study and Research Activity on air quality in a Linear Algebra course

## Abstract

The teaching of Linear Algebra in engineering suffers from persistent decontextualization, a phenomenon the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) describes as the "monumentalization of knowledge". This study addresses this issue by analyzing the implementation of a Study and Research Activity (AEI, by its Spanish acronym) on air quality in a Linear Algebra course with 38 engineering students in Colombia. The objective was to analyze the emergence and characteristics of the nine ATD dialectics as the driving force of the learning process. Using a qualitative case study design, 18 hours of video recordings, student coursework, and a researcher-teacher field journal were collected and analyzed. The findings reveal a clear hierarchy in the manifestation of the dialectics: a high-frequency group (Study-Research, Individual-Collective) drove the procedural management of the task, whereas a low-frequency group (Praxeological-Didactic Analysis, Black Boxes-Clear Boxes) highlighted the difficulty of fostering deep epistemological reflection on mathematical knowledge itself. It is concluded that while the AEI is a powerful device for activating mathematical modeling in authentic contexts, the emergence of meta-praxeological reflection is not spontaneous and requires intentional didactic scaffolding from the instructor to transform the didactic contract.

**Keywords:** Study and Research Activity, Linear Algebra, Engineering Education, Didactic Dialectics, Mathematical Modeling, Anthropological Theory of the Didactic.

## Introducción

En ingeniería, el estudio de las Organizaciones Matemáticas (OM) del Álgebra Lineal es fundamental por su rigor teórico y procedimental. Sus contenidos permiten modelizar y resolver problemas reales, vinculándose directamente con la disciplina. Este estudio analiza específicamente los datos de material particulado del Valle de Aburrá, suministrados por las estaciones de monitoreo del SIATA.

La enseñanza del Álgebra Lineal en ingeniería padece una descontextualización documentada globalmente [1], [2]. En Colombia, esto se evidencia en los bajos resultados en las pruebas Saber Pro [3] y la alta reprobación en instituciones como el Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid (PJC). Este enfoque tradicional y abstracto, desvinculado de la práctica profesional, dificulta la comprensión de los objetos matemáticos y su aplicación en la resolución de problemas de ingeniería.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), de Chevallard [4]-[6], atribuye esta problemática a la 'monumentalización del saber' y la pérdida de sentido de las Organizaciones Matemáticas (OM) en la universidad. Este fenómeno ocurre al enseñar contenidos como 'obras muertas', carentes de funcionalidad o reflexión didáctica, lo que desvincula el conocimiento del contexto social del estudiante y genera desinterés.

Frente a este panorama, la TAD propone un cambio de paradigma mediante la Pedagogía de Investigación y Cuestionamiento del Mundo (PICM) [6]. Aunque la viabilidad de este enfoque se ha evidenciado en Actividades de Estudio e Investigación (AEI) para Cálculo [7] y Física [8], persisten brechas en su aplicación al Álgebra Lineal en Colombia. Por ello, este estudio diseña e implementa una AEI para analizar cómo este dispositivo moviliza el conocimiento matemático mediante un problema real y significativo para futuros ingenieros [9].

Este estudio diseña, implementa y analiza una Actividad de Estudio e Investigación (AEI) en un curso de Álgebra Lineal del Politécnico Jaime Isaza Cadavid. La AEI se articula en torno a la pregunta generatriz  $Q_0$ : ¿Cómo mejorar la calidad del aire en el Valle de Aburrá?, con el fin de movilizar las Organizaciones Matemáticas (OM) en un contexto auténtico

Esta investigación analiza la emergencia y caracterización de las dialécticas de la TAD durante la implementación de la AEI. El estudio identifica la frecuencia de las nueve dialécticas en las fases de la actividad, caracteriza las producciones estudiantiles como indicadores empíricos y determina la relación entre las preguntas derivadas ( $Q_i$ ) y la activación de dialécticas específicas en los grupos

## Marco Teórico

### *Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD)*

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard [10] modela la actividad matemática desde su dimensión institucional [11, 12], analizando cómo las estructuras sociales condicionan el pensamiento y la acción. Su núcleo es la praxeología, que describe toda actividad mediante dos niveles: la praxis o saber-hacer (tarea (T) y técnica ( $\tau$ ) y el logos o saber (tecnología ( $\theta$ ) que justifica y teoría ( $\Theta$ ) que fundamenta).

A diferencia de enfoques centrados en la interacción individual como la TSD [13], se opta por la TAD para abordar el problema desde una dimensión institucional y epistemológica. Dado que la 'monumentalización' del Álgebra Lineal surge de una enseñanza universitaria desarticulada, la TAD —mediante la AEI— permite reconstruir la razón de ser de los saberes en su marco institucional, resultando idóneo para revertir este fenómeno [14].

### *Las Dialécticas en la TAD: De la Teoría a la Observación*

En una AEI, la construcción de respuestas se organiza mediante tensiones dialécticas que articulan estudio, investigación, producción individual y validación colectiva, según la TAD [5], [6]. Así, el trabajo matemático no es una secuencia de etapas, sino un movimiento de indagación que formula y reformula preguntas sobre un fenómeno; en este caso, la calidad del aire modelada desde el Álgebra Lineal.

La dialéctica (DEI) se activa cuando el grupo consulta fuentes externas para fundamentar decisiones de modelación, generando preguntas derivadas que refinan la investigación [15]. Esta se identifica cuando el rastro documental muestra la cadena  $Q \rightarrow Q' \rightarrow Q''$  vinculada a dichas fuentes y evidencia ajustes en el plan, tales como cambios en variables, en la estructura matricial o en los criterios de validación del modelo [15].

La dialéctica (DIC) ocurre cuando hallazgos individuales se negocian bajo criterios didácticos para consolidar decisiones y argumentos colectivos [15]. La DAPD surge al justificar técnicas matemáticas según el contexto (datos o normas) para evitar el cálculo mecánico [5, 6, 15]; se manifiesta al cuestionar la necesidad de métodos específicos. Ambas se validan mediante transcripciones e informes que documentan la evolución de los aportes [15]. Finalmente, la DEST implica la flexibilidad transdisciplinar entre el Álgebra Lineal y dominios como el ambiental para fundamentar la respuesta matemática [16].

La Dialéctica del Paracaidista y de las Trufas (DPT) alterna la visión panorámica del problema con el análisis exhaustivo de aspectos específicos, como al contextualizar fuentes de contaminación para luego modelar un único contaminante. Paralelamente, la Dialéctica de Cajas Negras y Cajas Claras (DCNC) gestiona la profundidad del estudio: se

aceptan saberes o herramientas como "cajas negras" (ej. uso de software) para priorizar el análisis detallado o la interpretación de resultados como "cajas claras".

La Dialéctica Medio-Media (DMM) gestiona la relación entre el entorno de trabajo del grupo y los recursos externos consultados. Ocurre cuando los estudiantes adaptan, validan e integran modelos de fuentes externas en su propia argumentación, en lugar de replicarlos. Similarmente, la Dialéctica de la Lectura y de la Escritura (DLE) implica un proceso de 'excripción' (extraer lo útil) e 'inscripción' (reescribir en formato propio), evidenciable en la elaboración de resúmenes, tablas o esquemas que trascienden la simple transcripción de información.

Finalmente, la Dialéctica de la Producción y la Recepción (DPR) implica difundir, defender y someter la respuesta al juicio colectivo. Se materializa en las puestas en común, donde los estudiantes actúan como receptores críticos que plantean objeciones o mejoras, obligando a los autores a refinar su propuesta ante el escrutinio del grupo.

## Materiales y Métodos

Bajo un paradigma interpretativo, esta investigación adoptó un estudio de caso intrínseco para comprender la complejidad del fenómeno en su contexto. El escenario se delimitó en un curso de Álgebra Lineal del Politécnico Jaime Isaza Cadavid (Medellín), con un grupo de 38 estudiantes seleccionado por conveniencia. Dado que el propósito es la comprensión profunda y no la generalización, se reconoce una transferibilidad limitada [17].

El trabajo de campo abarcó nueve sesiones mediante una estrategia de recolección múltiple. Se registraron 18 horas de video con enfoque rotativo en los grupos y puestas en común para capturar diversas interacciones. Simultáneamente, el investigador principal, en su rol de docente, mantuvo un diario de campo detallado para consignar registros sistemáticos, decisiones metodológicas y dinámicas por sesión [17].

Se recopilaron producciones documentales (borradores e informes) y se elaboraron memos analíticos tras cada sesión para registrar hipótesis iniciales. El corpus se analizó mediante análisis de contenido temático deductivo, con una codificación sistemática de turnos de habla y párrafos. Para asegurar una lectura total y homogénea, se aplicó una matriz de códigos consistente con el marco teórico de las dialécticas [17].

El análisis fue asistido por ATLAS.ti para organizar el corpus y consolidar la base de datos de codificación. Se identificaron patrones de frecuencia y se seleccionaron extractos representativos como evidencia textual. La credibilidad se fortaleció mediante triangulación de investigadores y consenso en la codificación, manteniendo la cadena de evidencia para la confirmabilidad y la reflexividad para mitigar sesgos del rol docente. Finalmente, se garantizó la aprobación ética institucional, el consentimiento informado,

el anonimato y la confidencialidad [17], [18].

## Resultados

Este capítulo presenta los hallazgos del análisis temático aplicado a las 18 horas de video, los documentos de once grupos y el diario de campo. Se identificó la manifestación de las nueve dialécticas de la TAD según el libro de códigos metodológico. La Tabla I resume la frecuencia de cada dialéctica y sirve como mapa para la discusión detallada a continuación.

**Tabla I.** Frecuencia y evidencia de las dialécticas identificadas

Código	Dialéctica	Definición operativa (criterio de codificación)	Categoría de recurrencia	Tipo de evidencia	Ejemplo de unidad con metadatos
DEI	Estudio – Investigación	Tensiones o articulaciones explícitas entre actividades de estudio (lectura, comprensión, sistematización) y de investigación (indagación, formulación de preguntas, contrastación de fuentes).	Constante	TV	Cita de transcripción: [TV, G4–S3, 25:14]
DIC	Individuo – Colectivo	Negociación entre trabajo individual (responsabilidades, aportes) y trabajo colectivo (acuerdos, coautorías, roles).	Constante	DOC	Fragmento de informe de grupo: [DOC, G9–IF, p. 4]
DMM	Medio – Media	Referencias a soportes, herramientas o plataformas (medio) y a sus formas de representación/comunicación (media), así como su efecto en la actividad.	Frecuente	TV	Cita de transcripción: [TV, G2–S2, 58:02]
DLE	Lectura – Escritura	Secuencias que vinculan lectura (extracción/interpretación) y escritura (producción/síntesis), o tensiones en el paso de una a otra.	Frecuente	IMG	Imagen de esquema conceptual: [IMG, G6–EC, p. 1]
DPR	Producción – Recepción	Alternancia o confrontación entre la producción de contenidos (presentaciones, borradores) y su recepción (retroalimentación, audiencia, interpretación).	Frecuente	TV	Cita de transcripción: [TV, G5–S8, 1:05:33]
DEST	Entrar – Salir del tema	Cambios de foco temático (digresiones y retornos) que impactan la continuidad de la tarea o la coherencia del hilo de trabajo.	Moderada	TV	Cita de transcripción: [TV, G1–S5, 12:40]
DPT	Paracaidista – Trufas	Episodios de exploración superficial/amplia (“paracaidista”) frente a búsqueda profunda/intensiva (“trufas”) sobre un tópico o fuente.	Moderada	TV	Cita de transcripción: [TV, G11–S4, 33:12]
DCNC	Cajas Negras – Claras	Contraste entre procesos opacos (tecnológicos/metodológicos) usados sin comprender y procesos transparentes que se explicitan y comprenden.	Baja	TV	Cita de transcripción: [TV, G3–S6, 51:15]

DAPD	Análisis praxeológico – didáctico	Pasos que distinguen y conectan praxis (tareas, técnicas, uso real) y didáctica (justificación, teoría, fines formativos).	Baja	DC	Cita de diario de campo: [DC, S7]
------	-----------------------------------	--	------	----	-----------------------------------

*Notas metodológicas.* Umbrales sugeridos para la categoría de recurrencia: Constante  $\geq$  80%; Frecuente = 50–79%; Moderada = 20–49%; Baja < 20%. Esquema de metadatos: TV = Transcripción de video ([TV, G#–S#, mm:ss]); DOC = Documento/informe ([DOC, G#–ID, p. #]); IMG = Imagen/gráfico ([IMG, G#–ID, p. #]); DC = Diario de campo ([DC, S#] o [DC, fecha]).

El análisis revela que diversas dialécticas impulsaron la AEI, destacando la del Estudio y la Investigación (DEI) por su presencia constante. Los estudiantes pronto validaron que sus opiniones requerían el respaldo de fuentes autorizadas para progresar.

Estudiante 1 (G4): *"Ok, no podemos solo decir 'hay contaminación'. Necesitamos el dato duro. Hay que buscar en la página del SIATA los promedios de PM2.5 para marzo, que es el mes crítico, y contrastarlos con lo que dice la norma de la OMS. Si no, lo que digamos no tiene validez"* [TV, G4-S3, 25:14]. Este extracto ilustra la DEI en acción: la pregunta inicial sobre cómo mejorar impulsa un estudio de promedios y normas que, a su vez, deriva en el contraste de datos locales con estándares internacionales. Las producciones grupales son el resultado directo de este ciclo de investigación.

En el inicio de la AEI, la formulación del problema llevó a los grupos a delimitar el objeto de estudio y a movilizar fuentes para sostener su indagación. En ese marco, el grupo 9 construyó una definición operativa del fenómeno que orientó las preguntas posteriores, mientras que el grupo 7 identificó recursos institucionales para acceder a registros y evidencia empírica del contexto de referencia.

**Extracto 1 (Grupo 9):** *"[...] se puede considerar la contaminación atmosférica como todo aquello que afecta la atmósfera comprendida como la capa gaseosa, de aire que rodea o envuelve el planeta Tierra"*

**Extracto 2 (Grupo 7):** *"[...] hizo énfasis en la importancia de conocer el Geoportal y la página web del SIATA, para conocer el monitoreo, el registro, los estudios y las diferentes actividades que realizan para el mejoramiento de la calidad del aire en el AMVA"*

Estos fragmentos evidenciaron el pasaje desde una aproximación definicional (necesaria para precisar qué se investigaba) hacia la identificación de fuentes y dispositivos de validación empírica (necesarios para sostener la investigación y orientar la modelización posterior).

La Dialéctica del Individuo y del Colectivo (DIC) también fue fundamental. Pese a la distribución de tareas, las conclusiones exigieron consenso y defensa grupal, lo que

impulsó debates continuos para integrar las contribuciones individuales.

Estudiante 2 (G9): "Yo hice el ajuste lineal para los datos de la estación de Tráfico Centro, pero Ana dice que un ajuste cuadrático se ajusta mejor en las horas pico. Miremos las dos gráficas juntas. Si la de ella tiene un  $R^2$  más alto y tiene sentido con el flujo vehicular, usamos esa, pero todos tenemos que entender por qué es mejor" [TV, G9-S7, 48:21]

Aquí, la propuesta de un individuo ("yo hice el ajuste lineal") es sometida a la validación del colectivo ("Ana dice...", "miremos las dos gráficas"), que establece un criterio técnico (" $R^2$  más alto") y una condición de apropiación grupal ("todos tenemos que entender") antes de adoptarla. La Figura 1 y la Figura 2 ilustran productos de esta dialéctica, donde técnicas individuales se integran en una respuesta grupal.

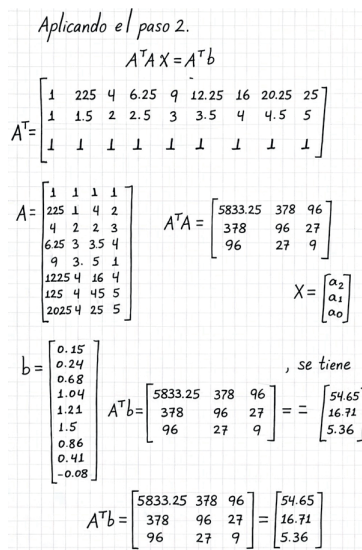


Figura 1. Evidencias sobre la dialéctica del Individuo y el colectivo

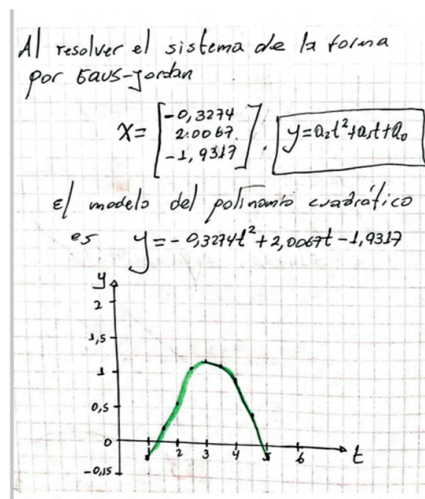


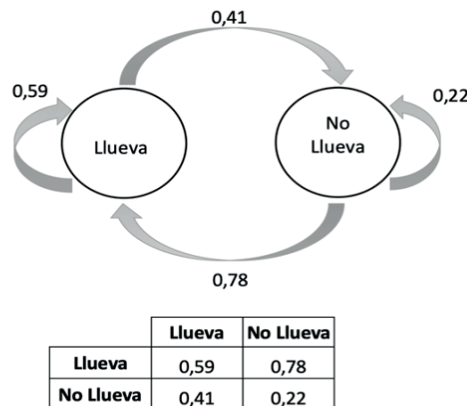
Figura 2. Evidencias sobre la dialéctica del Individuo y el colectivo

### Dialécticas de Gestión del Conocimiento y la Tarea

Un segundo grupo de dialécticas gestionó la complejidad de la tarea, destacando la Dialéctica de Entrar y Salir del Tema (DEST). Esta fue crucial para que los estudiantes incursionaran en otras disciplinas al interpretar los datos matemáticos.

Estudiante 3 (G1): *"Los picos de contaminantes no coinciden solo con el tráfico. Leí en un artículo que la 'inversión térmica' atrapa los contaminantes en el valle. Tenemos que salir del álgebra un momento y entender qué es eso meteorológicamente para poder justificar por qué nuestro modelo polinómico tiene esa forma cóncava en las mañanas"* [TV, G1-S5, 12:40]

Este fragmento muestra una salida explícita del tema central ("*salir del álgebra un momento*") para buscar una justificación en otra disciplina (meteorología), con el objetivo de regresar y enriquecer el modelo matemático. Las cadenas de Márkov para analizar probabilidades de lluvia (Figura 3) son otro ejemplo claro de esta dialéctica.



Entonces la matriz de transición queda:

$$T = \begin{bmatrix} 0,59 & 0,78 \\ 0,41 & 0,22 \end{bmatrix}$$

Figura 3. Evidencias sobre la dialéctica de salir y entrar del tema

La mortalidad por contaminación atmosférica se concentra en cardiopatía isquémica (40%), accidente cerebrovascular (40%), EPOC (11%), infecciones respiratorias (6%) y cáncer de pulmón (3%), lo que confirma el severo impacto de la calidad del aire en la salud. Aunque menos frecuente, la Dialéctica de las Cajas Negras y Claras (DCNC) surgió en momentos clave, no como una dificultad, sino como una decisión estratégica grupal para facilitar el progreso.

Estudiante 4 (G3): *"No tenemos tiempo de deducir la fórmula de mínimos cuadrados, pero GeoGebra nos da la curva de ajuste y el  $R^2$ . Usemos la función del software como una 'caja negra' y centrémonos en abrir la 'caja clara': interpretar qué significa el coeficiente principal para la aceleración de la contaminación en la ciudad"* [TV, G3-S6, 51:15]

Más que un bloqueo, el extracto muestra una decisión metodológica: tratar el algoritmo como una "caja negra" para priorizar el esfuerzo cognitivo en la interpretación de los resultados, objetivo central de la tarea.

### ***Dialécticas Vinculadas a la Intervención Docente y la Difusión***

Por último, ciertas dialécticas se vincularon estrechamente a la intervención docente o la socialización. La Dialéctica del Análisis Praxeológico y Didáctico (DAPD) derivó principalmente del investigador, según consta en el diario de campo.

*"Durante la revisión del Grupo 6, noto que aplican la fórmula de distancia entre dos puntos para las coordenadas de las estaciones, pero sin considerar la topografía. Les pregunto: '¿Qué supone esta fórmula sobre el terreno entre las dos estaciones? ¿Es un supuesto válido para un valle con montañas?'. La pregunta busca que cuestionen la técnica (praxeología) y su pertinencia en este contexto (didáctica)." [DC, S7]*

Este tipo de intervención busca que los estudiantes reflexionen no solo sobre la técnica, sino sobre las condiciones de su uso.

En el desarrollo de la AEI emergió una tensión didáctica relevante entre el tratamiento habitual de la distancia en geometría analítica y la organización matemática movilizadas en el curso, lo que detonó nuevas preguntas de investigación. En particular, algunos estudiantes problematizaron el uso directo de la fórmula euclidiana de distancia en  $\mathbb{R}^2$ , y esa dificultad operó como punto de partida para reorientar la indagación.

**Extracto 3 (Grupos 6 y 1):** "[...] manifiestan que no se puede calcular la distancia entre dos puntos en  $\mathbb{R}^2$ , como se aborda en la geometría analítica, es decir, con la expresión:  $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$  [...]"

A partir de esa situación, el docente propuso una tarea aplicada que conectó el problema con datos del contexto y abrió el espacio para la formulación de preguntas derivadas.

**Extracto 4 (Docente / consigna de trabajo):** "El docente propone [...] determinar las distancias entre las estaciones donde es más crítica la situación de la contaminación del aire [...] donde surgen las preguntas derivadas: ¿Cuáles sustancias o material particulado afectan más la salud humana en el valle de Aburrá? ¿Cómo es el comportamiento de los datos suministrados por las estaciones de monitoreo de la calidad del aire? [...] algunas respuestas se pueden obtener [...] con los archivos de las hojas de cálculo de Excel"

Estos fragmentos evidenciaron el pasaje desde una dificultad matemática inicial hacia la formulación de preguntas investigables y la movilización de medios (datos/archivos) para sostener el estudio, consolidando la progresión propia de la AEI.

La Dialéctica de la Producción y la Recepción (DPR) fue el eje de las sesiones de puesta

en común. Los grupos no solo presentaban sus hallazgos, sino que debían defenderlos ante las preguntas de sus compañeros.

Estudiante 5 (G10, preguntando al G2): *"Ustedes proponen usar más vehículos eléctricos, pero en su modelo no consideran el impacto ambiental de la producción de baterías ni la fuente de la energía eléctrica en Colombia. ¿Su solución es realmente menos contaminante a nivel global o solo traslada la contaminación a otro lugar?"* [TV, G2-S8, 1:15:40]

Esta interpelación exige al grupo defender su respuesta, integrar nuevas variables y refinar conclusiones, evidenciando la dimensión social del conocimiento.

La dinámica de discusión intergrupala permitió refinar la pregunta sobre el cálculo del índice de calidad del aire (ICA) y, simultáneamente, incorporar instrumentos de cálculo como "medio" para sostener el estudio. En ese marco, tras la participación inicial de un grupo, otros estudiantes retomaron la pregunta sobre cómo se calculaba matemáticamente el ICA y presentaron una hoja de cálculo que automatizaba el procedimiento y facilitaba la visualización de rangos asociados al AQI/ICA.

**Extracto 5 (Interacción estudiantil / recurso):** *"[...] para seguir dando respuesta a la pregunta ¿cómo se calcula matemáticamente el índice de la calidad del aire (ICA)? [...] muestran un documento de Excel que permite el cálculo del índice de la calidad del aire en forma dinámica [...]"*

Al cierre de la exposición, la discusión se expandió desde el cálculo hacia interrogantes de carácter sociotécnico y de acción pública vinculados al problema, lo que amplió el campo de investigación más allá del tratamiento matemático inmediato.

**Extracto 6 (Preguntas derivadas / cierre):** *"Al terminar la exposición, surgen los siguientes interrogantes [...] ¿Qué políticas públicas de los gobiernos locales han servido para el plan de contingencia ambiental y cuáles no? [...] Desde la Ingeniería [...] ¿cómo puede contribuir a mejorar la calidad del aire en el valle de Aburrá?"*

Estos fragmentos evidenciaron cómo la AEI transitó de una pregunta técnica de modelización/cálculo hacia un conjunto de preguntas derivadas que conectaron el objeto matemático con decisiones y acciones en el contexto, manteniendo la coherencia del estudio mediante la incorporación de un recurso instrumental (hoja de cálculo) como soporte para la investigación.

En la fase de socialización, la discusión se desplazó desde el tratamiento técnico hacia propuestas de intervención y criterios de responsabilidad socioambiental, evidenciando una ampliación del objeto de estudio más allá del cálculo. **Extracto 7 (Grupo 4):** *"[...] se puede tomar acciones concretas desde lo disciplinar [...] donde mejorar la calidad del aire es una responsabilidad personal y social".* A partir de esa postura, el grupo planteó medidas de acción vinculadas a movilidad y a decisiones de diseño/ingeniería. **Extracto**

**8 (Medidas propuestas):** *“Implementar [...] la medida de carpooling [...]” y “[...] uso de materiales amigables con el medio ambiente [...] protección y aplicación de protocolos [...] para mejorar la disipación del material particulado”.* De manera complementaria, la indagación incorporó un esfuerzo por caracterizar el fenómeno desde la identificación de fuentes y contaminantes, lo cual fortaleció la comprensión del problema y ofreció un marco para interpretar los datos de monitoreo. **Extracto 9 (Caracterización de fuentes):** *“[...] estimen todos los contaminantes que provienen de [...] actividades humanas [y] fuentes de origen natural [...] diferenciar entre fuentes estacionarias (fijas) y fuentes móviles [...]”* e incluyó ejemplos de emisiones asociadas a dinámicas naturales y a actividades productivas.

Si su objetivo era **reducir** sin perder evidencia, esta figura se podía condensar aún más dejando **solo un extracto** representativo (por ejemplo, Extracto 7 + una frase síntesis), porque la lista extensa de medidas (carpooling, construcciones, materiales, protocolos, etc.) no siempre se conecta directamente con el núcleo didáctico-matemático (Álgebra Lineal/TAD) y puede percibirse como “contexto” si no se analiza como parte de una dialéctica específica. En ese caso, quedaría así: el grupo 4 afirmó que mejorar la calidad del aire implicaba responsabilidad personal y social y que podían tomarse acciones desde lo disciplinar (Extracto 7); esa ampliación mostró el tránsito desde la pregunta técnica hacia un horizonte de decisiones sociotécnicas, manteniendo la coherencia de la AEI al conectar el estudio con el contexto.

En la socialización, el grupo 2 amplió la explicación del fenómeno incorporando factores territoriales y atmosféricos que excedían la dicotomía “fuentes fijas vs. móviles”, incluyendo efectos de quemas y uso de agroquímicos transportados por viento hacia el valle de Aburrá.

**Extracto 10 (Grupo 2):** *“[...] otros factores que afectan la calidad del aire [...] son las quemas de bosques y el uso de plaguicidas, herbicidas y químicos [...] que por los vientos [...] llegan al valle del Aburrá [...]”*

A partir de esa exposición, emergieron preguntas que conectaron el análisis con variables meteorológicas (viento) y con condiciones del entorno construido.

**Extracto 11 (Interacción / viento):** *“[...] preguntan ¿por qué es importante el análisis de viento junto con sus parámetros [...]? [...] se puede establecer que las montañas, los edificios, los diferentes túneles [...] son obstáculos que modifican [...] el movimiento del viento [...]”*

Finalmente, la discusión incorporó la dimensión institucional y de políticas públicas como parte del campo problemático, mencionando coordinación interinstitucional y protocolos de contingencia.

**Extracto 12 (Políticas / institucionalidad):** “[...] políticas públicas [...] diálogo permanente entre los entes ambientales [...] SIATA, Área Metropolitana del Valle de Aburrá (AMVA) [...] creación de un protocolo en época de contingencia ambiental (POECA) [...]”

### Relación entre Preguntas Derivadas y Activación de Dialécticas

Este apartado analiza el tercer objetivo específico de la investigación. La Tabla II detalla las dialécticas manifestadas al responder las 13 preguntas derivadas (Qi) surgidas durante la AEI.

Tabla II. Preguntas derivadas y las dialécticas presentes

AEI Preguntas Derivadas	Dialécticas								
	DEI	DIC	DAPD	DEST	DPT	DCNC	DM	DEL	DPR
Q1	√	√		√			√	√	
Q2	√	√		√			√	√	
Q3	√	√		√			√	√	√
Q4	√	√	√	√	√	√	√	√	√
Q5	√	√		√	√		√	√	√
Q6	√	√	√	√	√	√	√	√	√
Q7	√	√			√		√	√	
Q8	√	√	√	√	√	√	√	√	√
Q9	√	√			√		√		√
Q10	√	√	√		√		√	√	√
Q11	√	√			√		√	√	√
Q12	√	√		√			√	√	√
Q13	√	√					√	√	√

## Discusión

El análisis de la AEI revela un patrón claro: las dialécticas de indagación y colaboración (DEI, DIC, DMM, DPR) fueron constantes y robustas, mientras que aquellas de carácter metacognitivo y epistemológico (DAPD, DCNC) mostraron una presencia menor. Esto sugiere que, si bien la AEI dinamiza eficazmente la actividad matemática y el trabajo grupal, la reflexión profunda no es automática y exige un andamiaje didáctico intencionado.

Los resultados sintonizan con Parra y Otero [15], quienes reportan una alta frecuencia de la DEI y la DIC en las fases iniciales de los REI, confirmándolas como el núcleo operativo de la PCIM. En contraste, la baja incidencia de la DAPD y la DCNC coincide con las dificultades señaladas por Costa et al. [16, 19] en contextos universitarios; allí, la cultura institucional centrada en la técnica suele inhibir el cuestionamiento praxeológico [20]. Así, la AEI logró que los estudiantes emplearan las matemáticas para resolver una pregunta auténtica, pero halló obstáculos para que cuestionaran las herramientas matemáticas utilizadas.

## Referencias

ron aportes recientes que han precisado el alcance epistemológico y metodológico de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y su programa de investigación [21], así como el análisis de la incidencia de los paradigmas didácticos en la práctica docente [22]. Complementariamente, se integró evidencia actual sobre recorridos de estudio e investigación orientados por indagación mediada por web [23] y sobre enfoques de aula para promover indagación en cursos universitarios de Álgebra Lineal [24]. En el componente socioambiental, la relevancia de la calidad del aire se contextualizó con literatura científica reciente sobre riesgos sanitarios y guías internacionales [25]–[27], y con experiencias educativas basadas en sensores portátiles para caracterizar calidad del aire con datos reales [28].

Interpretar la DCNC como una "dificultad" y no como una estrategia para gestionar la complejidad es revelador: los estudiantes, habituados a un paradigma que penaliza el "no saber", no se sintieron habilitados para ignorar deliberadamente ciertos conocimientos. Esto sugiere que la PCIM exige transformar no solo el dispositivo didáctico, sino el contrato didáctico implícito del aula.

## Conclusiones

La investigación revela una jerarquía clara en las dialécticas: un grupo de alta frecuencia (DEI, DIC, DMM, DPR, DLE) sostuvo el andamiaje procedimental; uno de frecuencia moderada (DEST, DPT) aportó flexibilidad; y uno de baja frecuencia (DAPD, DCNC) evidenció la dificultad de la reflexión meta-praxeológica. Como indicadores empíricos destacaron el debate colectivo (DIC), la adaptación de modelos externos (DMM) y la contra-argumentación en puestas en común (DPR). Finalmente, se confirmó que las preguntas derivadas (Qi) determinan la activación dialéctica: las descriptivas impulsaron la DEI y DMM, mientras que las evaluativas o causales activaron un espectro más amplio.

Estas conclusiones presentan limitaciones metodológicas. Al ser un estudio de caso intrínseco con muestreo por conveniencia, la transferibilidad y generalización estadística de los hallazgos son limitadas. El doble rol del investigador como docente constituye la principal amenaza a la validez interna, pese a los ejercicios de reflexividad. Finalmente, la falta de validación con participantes o auditorías externas restringe la confirmabilidad de los resultados.

Pese a las limitaciones, este estudio aporta implicaciones concretas. En la docencia, se sugiere diseñar intervenciones para fomentar dialécticas infrecuentes, como "pausas praxeológicas" (DAPD) o "presupuestos de tiempo" para forzar decisiones estratégicas (DCNC). Curricularmente, las AEI deberían integrarse como un eje longitudinal para transformar la cultura institucional y el contrato didáctico. Para futuras investigaciones, se proponen estudios cuasi-experimentales con andamiaje metacognitivo explícito y estudios longitudinales que sigan a cohortes a través de múltiples AEI.

## Referencias

- [1] V. Costa, R. Rossignoli, C. Sorichetti, and V. Vampa, *Álgebra Lineal con Aplicaciones*, Parte I. La Plata, Argentina: Universidad Nacional de La Plata, 2018.
- [2] F. Álvarez-Macea and V. A. Costa, "Enseñanza del Álgebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico", *Eco Matemático*, vol. 10, no. 2, pp. 65–78, Jul. 2019.
- [3] Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES), Informe Nacional de resultados de los exámenes Saber Pro y Saber TyT 2023. [Online]. Available: [https://www.icfes.gov.co/documents/d/guest/informe\\_nacional\\_resultados\\_saber\\_pro\\_saber\\_tyt\\_2023-1](https://www.icfes.gov.co/documents/d/guest/informe_nacional_resultados_saber_pro_saber_tyt_2023-1). Accessed: Feb. 6, 2026.
- [4] Y. Chevallard, "Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique", in *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*, L. Ruiz, A. Estepa, and F. J. García, Eds. Jaén, España: Universidad de Jaén, Servicio de Publicaciones, 2007, pp. 705–746.
- [5] Y. Chevallard, "Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement", *Journal du Séminaire TAD/IDD*, 2009. [Online]. Available: [https://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=125](https://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125). Accessed: Feb. 6, 2026.
- [6] Y. Chevallard, "Théorie Anthropologique du Didactique & Ingénierie Didactique du Développement", *Journal du Séminaire TAD/IDD*, 2013. [Online]. Available: [https://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id\\_article=125](https://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125). Accessed: Feb. 6, 2026.
- [7] C. A. Ledezma, "*Estudio de la Modelización Matemática desde un Enfoque Semiótico-Cognitivo e Implicaciones en la Formación de Profesores*", tesis doctoral, Universitat de Barcelona, Barcelona, España, 2024.
- [8] J. Gascón, "Actividades matemáticas, modelos y modelización: usos y abusos de la modelización en la enseñanza de las matemáticas", in *Matemáticas e Innovación*, M. Camacho, P. Flores, and M. P. Bolea, Eds. San Cristóbal de La Laguna, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2006, pp. 117–124.
- [9] J. Gascón, "Elementos para una tipología de las tareas matemáticas", *Suma*, vol. 61, pp. 9–16, 2009.
- [10] J. Gascón, "El problema del diseño y análisis de las tareas didácticas en la enseñanza de las matemáticas", *Educación Matemática*, vol. 31, no. 1, pp. 25–61, Apr. 2019.
- [11] Y. Chevallard, "Teaching Mathematics in Tomorrow's Society: A Case for an Oncoming

- Counterparadigm", *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 2, no. 2, pp. 161–182, Jun. 2013. doi: 10.4471/redimat.2013.26.
- [12] C. Gonzales, V. Papuico, and M. Cabrera, "Modelización matemática en la formación de estudiantes de medicina", in *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, L. Sema and D. Páges, Eds. Ciudad de México, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2018, pp. 1344–1351.
- [13] G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage, 2007.
- [14] M. Bosch and J. Gascón, "Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria", in *Investigación en educación matemática XIII*. Santander, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2009, pp. 89–114.
- [15] V. Parra and M. R. Otero, "Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las dialécticas", *Educación Matemática*, vol. 29, no. 3, pp. 9–49, Aug. 2017.
- [16] V. A. Costa, M. Arlego, and M. R. Otero, "Las dialécticas en un Recorrido de Estudio e Investigación para la enseñanza del Cálculo Vectorial en la Universidad", *Revista de Formación e Innovación Educativa Universitaria (REFIEDU)*, vol. 8, no. 3, pp. 146–161, Jun. 2015.
- [17] R. Hernández Sampieri, C. Fernández Collado, and P. Baptista Lucio, *Metodología de la investigación*. Ciudad de México, México: McGraw-Hill, 2014.
- [18] C. E. Velázquez-Rodríguez, "HuffmanEncoder: una aplicación informática para codificar mensajes por el método de Huffman", *Ciencia & Futuro*, vol. 4, no. 3, pp. 33–50, Sep. 2014.
- [19] V. A. Costa, "*Recorridos de Estudio e Investigación Codisciplinarios en la Universidad para la enseñanza del Cálculo Vectorial en carreras de Ingeniería*", tesis doctoral, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Tandil, Argentina, 2013.
- [20] A. Corica and M. Otero, "Estudio sobre las praxeologías que se proponen estudiar en un Curso Universitario de Cálculo", *Bolema*, vol. 26, no. 42B, pp. 459–482, Apr. 2012.
- [21] J. Gascón, "Contributions of the anthropological theory of the didactic to the epistemological programme of research in mathematics education", *ZDM – Mathematics Education*, vol. 56, no. 6, pp. 1319–1330, Aug. 2024. doi: 10.1007/s11858-024-01563-1.

- [22] J. Gascón and P. Nicolás, "Incidencia de los paradigmas didácticos sobre la investigación didáctica y la práctica docente", *Educación Matemática*, vol. 33, no. 1, pp. 7–40, 2021. doi: 10.24844/EM3301.01.
- [23] A. Moreno and D. Bartolomé, "Study and research paths improve web-based inquiry learning in science education", *Education Sciences*, vol. 11, no. 12, art. 772, Dec. 2021. doi: 10.3390/educsci11120772.
- [24] H. Fredriksen, K. L. Zirkler, T. T. P. Neergaard, and A. J. Ardila, "Flipped Classroom Approach in an Inquiry-Based Linear Algebra Course", *PRIMUS*, pp. 1–21, 2024. doi: 10.1080/10511970.2024.2375712.
- [25] B. Hoffmann et al., "WHO Air Quality Guidelines 2021: Aiming for Healthier Air for All—A Joint Statement by Medical, Public Health, Scientific Societies and Patient Representative Organisations", *International Journal of Public Health*, vol. 66, art. 1604465, 2021. doi: 10.3389/ijph.2021.1604465.
- [26] R. Fuller et al., "Pollution and health: a progress update", *The Lancet Planetary Health*, vol. 6, no. 6, pp. e535–e547, Jun. 2022. doi: 10.1016/S2542-5196(22)00090-0.
- [27] A. Pozzer et al., "Mortality Attributable to Ambient Air Pollution: A Review of Global Estimates", *GeoHealth*, vol. 7, no. 1, e2022GH000711, Jan. 2023. doi: 10.1029/2022GH000711.
- [28] J. C. D'Eon, L. T. Stirchak, A. Brown, and Y. Saifuddin, "Project-Based Learning Experience That Uses Portable Air Sensors to Characterize Indoor and Outdoor Air Quality", *Journal of Chemical Education*, vol. 98, no. 2, pp. 445–453, Feb. 2021. doi: 10.1021/acs.jchemed.0c00222.