Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas

Mundo Fesc
No.11,Enero-Junio
2016
ISSN:2216-0353
E-ISSN:2216-0388
PP:7-15

Models of implementation of first order differentia lequations with geogebra: activities to solve mixing problms

Cesar Augusto Hernandez Suarez[1], Luis Alberto Jaimes Contreras[2],
Rafael Felipe Chaves Escobar[3]

Resumen

El objetivo del estudio es diseñar una actividad para abordar los problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales que permita realizar cambios de representación en los registros gráfico, algebraico y lengua natural mediante la ayuda de software libre Geogebra, esperando así reducir la dificultad que presentan los estudiantes al momento de plantear la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas. La actividad se fundamenta en dos marcos, el didáctico y el matemático, los cuales fueron elaborados con los aportes de distintas fuentes consultadas acerca del objeto de investigación. La selección de los participantes fue realizada mediante muestreo intencional y durante el desarrollo de este proceso se eligieron dieciocho (18) estudiantes de un programa académico de Ingeniería Civil de un curso de ecuaciones diferenciales. Se aplicó una encuesta a los estudiantes sobre los modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden para determinar el modelo a utilizar; los modelos con mayor porcentaje de elección fueron: Mezclas y ley de enfriamiento de Newton, razón por la cual se eligió el modelo de mezclas para el diseño de una actividad tipo test con 3 problemas que para ser resueltos con el Geogebra. Se analizan las respuestas dadas por los estudiantes al resolver una serie de problemas de aplicación de primer orden con el software libre Geogebra. Estos problemas permiten realizar traspasos del registro lenguaje natural al algebraico mediante representaciones ejecutables y preguntas que pretenden orientar al estudiante durante el desarrollo de la misma, con el fin de proporcionar herramientas para plantear la ecuación diferencial que se ajusta a los problemas planteados. Como resultados se obtiene una propuesta del uso del Geogebra como un recurso didáctico para favorecer la resolución de problemas de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden (problemas de mezclas). Se puede concluir que los estudiantes tienen dificultades en temas que son considerados prerrequisitos de la asignatura ecuaciones diferenciales (conceptos propios del cálculo), además de la dificultad en el traspaso de registros (gráfico, algebraico y lengua natural) ya que en la mayoría de los casos estos prefieren expresar la respuesta en el mismo registro, en el cual está planteada la pregunta, siendo el monoregistro más representativo el algebraico.

Palabras claves: Enseñanza superior, Ecuaciones diferenciales, Geogebra, Registros de representación semiótica.

Abstract

The aim of the study is to design an activity to address the problems of mixtures in a course of differential equations that allow changes of representation in graphic records, algebraic and natural language with the help of free software Geogebra, hoping to reduce the difficulty presented students when framing the differential equation modeling a mixing problem. The activity is based on two frameworks, didactic and mathematical, which were developed with input from various sources consulted about the object of research. The selection of participants was conducted by purposive sampling and during the development of this process eighteen (18) students in an academic program Civil Engineering course differential equations were chosen. The instruments used were: surveys students about application models of first-order differential equations to use and test application with 3 problems first order with free software Geogebra. The answers given by students to solve a number of problems of implementation of the first order with free software Geogebra are analyzed. These problems allow registration transfers natural language to algebraic representations and executable by questions intended to guide the student during the development of it, in order to provide tools to raise the differential equation that fits the problems. As a result a proposal of using Geogebra is obtained as a teaching resource to facilitate troubleshooting application first order differential equations (problems mixtures). It can be concluded that students have difficulties on issues that are considered prerequisites of differential equations (own concepts of calculus), plus the difficulty in transferring records (graphical, algebraic, natural language) subject because in most cases they prefer to express the answer in the same record, in which the question is posed, the most representative monoregistro algebraic.

Keywords: Differential equations, Geogebra, semiotic representation registers.

[1]Msc. Enseñanza de las Ciencias Básicas Mención Matemática, cesaraugusto@ufps.edu.co, Universidad Francisco de Paula Santander, Cúcuta-Colombia.

[2]Msc. Educación Matemática, lajaimesc@udistrital.edu.co, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá- Colombia.

[3]Msc. Educación Matemática, rafach_25@hotmail.com, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá- Colombia.

Recibido: 3 oct 2015
Aceptado: 10 dic 2015

Forma de citar: Hernández, C. A.; Jaimes, L. A.; Chaves, R. F. (2016). Modelos de aplicación de ecuaciones diferenciales de primer orden con Geogebra: actividades para resolver problemas de mezclas. Mundo Fesc, 11, 7-15.

1. INTRODUCCIÓN

Desde la experiencia docente en cursos universitarios de Matemáticas, se observa que los estudiantes tienen dificultades cuando se enfrentan a problemas matemáticos. En ecuaciones diferenciales, en particular las aplicaciones de primer orden, tienen errores tal y como lo plantean (Juares y Irassar, 2012) para la comprensión del enunciado, falta de conocimientos anteriores, reconocer y diferenciar constantes, parámetros, variables, cambio de una variable respecto a otra, y dificultades para plantear la ecuación que las relacione. Además, muchos de los cálculos que se presentan en los problemas, manualmente resultan tediosos, complicados y repetitivos.

Así mismo, para la obtención de representaciones gráficas se utilizan métodos muy laboriosos. Lo que en muchos casos, ocasiona en el estudiante evaluaciones no satisfactorias, la probable perdida de la asignatura, la evasión de las clases y predisposición mental y actitudinal frente al desarrollo del curso. Además, como lo expresan (Hidalgo, et al 2004), de falta de interés y motivación, aburrimiento, rechazo, estrés y en algunos casos temor, dificultando el aprendizaje de los conceptos, quedando la creatividad de muchos de los estudiantes frustrada, así como la incapacidad de estos para utilizar el conocimiento matemático. Por lo tanto, todo lo anterior viene a generar un bajo rendimiento académico.

Por esta razón, una de las preocupaciones del docente, es la de buscar estrategias y actividades para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, en este caso el de las ecuaciones diferenciales, en el que se exploró el potencial del software libre Geogebra potenciado por su capacidad de cálculo; por su rapidez, versatilidad y posibilidades para generar modelos. Los cálculos y la representación gráfica que manualmente resultan tan tediosos y complicados, se pueden realizar con sorprendente facilidad y con gran rapidez. Estas características, permiten poner en juego el intercambio de registros (numérico, gráfico y algebraico).

Lo anterior conduce a plantear: ¿Qué actividades con el apoyo del software Geogebra permitirá realizar cambios de representación en los registros gráfico, algebraico y lenguaje natural en los problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales?

Si no se buscan estrategias de solución a la problemática anterior, se podría presentar una exclusión social y deserción académica de los programas curriculares contribuyendo a la expulsión del estudiante de la universidad (Rivas, 2005). En el caso particular, una de las asignaturas de matemáticas que se imparten en los distintos programas académicos que ofrece la universidad, causante de situación anterior es el curso de ecuaciones diferenciales.

Según Morales López y Salas Huertas (2010) en el estudio de las ecuaciones diferenciales actualmente “predomina el enfoque algebraico como reflejo de la primera forma que se tuvo de resolver estos problemas” y que algunos docentes emplean como estrategia didáctica. Para Nápoles, et al (2004) en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales algunos conceptos relacionados con límite, derivación e integración son Tevadidas u ocultadas con fórmulas o algoritmos, lo cual impide la comprensión precisa del concepto llevando al estudiante, y en ocasiones a los docentes, a concebir la fórmula como el concepto en sí mismo.

Generalmente en libros clásicos de ecuaciones diferenciales cuando se abordan los modelos lineales de primer orden, por lo general se le da al estudiante la ecuación diferencial que permite modelar este tipo de situaciones, presentándola como una fórmula, impidiendo la comprensión precisa del concepto como lo menciona Nápoles et al. (2004). Pero muy poco se trabaja sobre la forma como se construye esta ecuación diferencial, sobre cómo se realiza ese cambio de registro verbal al registro algebraico.
Para Duval (2006) en las transformaciones de las representaciones semióticas cuando se une un enunciado con una representación visual se pueden desarrollar dos funciones: "economía de memoria para tener en cuenta todos los elementos que se relacionan, o heurística para encontrar el teorema". El computador puede facilitar la unión de este enunciado y su representación visual ya que como menciona Villarreal (2003) el computador privilegia el pensamiento visual, y la imagen en el caso de la matemática es punto de apoyo a las nuevas tecnologías intelectuales que no rechaza lo verbal o algebraico.
Justificada la necesidad de incluir los recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, es posible encontrar cursos que no los incluyan debido a diversas limitaciones de acceso de tipo educativo y/o económico, lo cual dificulta integrar los enfoques algebraico y geométrico.

Por lo tanto, lo que se busco fue el de diseñar una actividad para abordar los problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales que permita realizar cambios de representación en los registros gráfico, algebraico y lengua natural mediante la ayuda de software libre "Geogebra", esperando así reducir la dificultad que presentan los estudiantes al momento de plantear la ecuación diferencial que modela un problema de mezclas.

La actividad se fundamenta en dos marcos, el didáctico y el matemático. El referente didáctico inicia con la teoría de las representaciones semióticas y cambios entre registros desarrollada por R. Duval, donde se resalta la importancia de los signos y lo que estos pueden llegar a representar (Guzmán I., 1998), así mismo se hizo referencia a las conversiones entre diferentes registros de representación (Lupiañez, 2000) mencionando la importancia no de tener el mejor sistema de representación sino de proporcionar al estudiante diferentes herramientas para representar los contenidos matemáticos (Duval, 2006).

En cuanto al pensamiento variacional se sabe que desde la escuela surge la idea de trabajar con situaciones de cambio lo cual se puede evidenciar en los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN). En lo que respecta a este tipo de pensamiento también se consideró los aportes realizados por Vasco (2006) quien lo describe como actividades mentales referentes al cambio, apoyadas en diferentes representaciones. Por otra parte en lo que refiere a las representaciones ejecutables esta propuesta pretende aportar una alternativa diferente al enfoque de enseñanza tradicional mediante la implementación de recursos tecnológicos (De las Fuentes, 2010). En ese sentido Dullius (2009) menciona que estos recursos permiten al estudiante interactuar con una representación de una ecuación diferencial que describe un problema de mezclas.

En el referente matemático están los temas correspondientes a razón de cambio, definición, clasificación y orden de una ecuación diferencial, ejemplos de problemas que permiten ser modelados por una ecuación diferencial. Se centra más en lo relacionado a modelos matemáticos, y las etapas por las que se debe pasar para concluir la construcción del mismo. Se sigue de Zill (2009) la definición de modelo matemático como sigue: Con frecuencia se requiere describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno real, ya sea físico, sociológico, o incluso económico, en términos matemáticos. La descripción matemática de un sistema o fenómeno se denomina modelo matemático, el cual se construye con ciertos objetivos en mente.
La construcción de un modelo matemático de un sistema pasa por diferentes etapas, inicia con la identificación de las variables responsables del cambio que se produzca en el sistema, aunque no todas se tengan en cuenta en el modelo debido a

que en condiciones ideales se pueda despreciar alguna (Zill, 2009). En este primer paso se especifica el nivel de resolución del modelo. A continuación, se formula un conjunto de premisas razonables o hipótesis acerca del sistema que intenta describir, teniendo en cuenta además cualquier ley empírica aplicable al sistema.

Debido a que las suposiciones que se plantean de un sistema con frecuencia implican una tasa de cambio de una o más variables, la representación matemática de todas estas suposiciones pueden implicar una o más ecuaciones que involucren derivadas. En el caso particular, en los problemas de mezclas, el modelo matemático es una ecuación o un sistema de ecuaciones diferenciales. Una vez formulada, el paso a seguir es intentar resolverlo. Si se puede resolver, entonces se considera que el modelo es razonable siempre y cuando la solución encontrada sea consistente con los datos proporcionados por las condiciones del sistema. Esta solución del sistema presenta lo que se conoce como estado del sistema.

Desde luego, si los resultados dados por la solución no concuerdan con los datos proporcionados por las condiciones del sistema, se debe considerar replantear el modelo, incrementar la resolución del sistema o formular premisas alternativas sobre los elementos causantes del cambio en el sistema.

2. MATERIALES Y MÉTODO

El proceso de investigación llevado a cabo parte de la metodología descriptiva en tanto se pretende analizar las respuestas al resolver una serie de problemas de aplicación de primer orden con el software libre Geogebra, dadas por los estudiantes de un curso de ecuaciones diferenciales, al momento de resolver una prueba con tres problemas relacionados con el modelo de mezclas. Estos problemas permiten realizar traspasos del registro lenguaje natural al algebraico mediante representaciones ejecutables y preguntas que pretenden orientar al estudiante durante el desarrollo de la misma, con el fin de proporcionar herramientas para plantear la ecuación diferencial que se ajusta a los problemas planteados

La población objeto de estudio, corresponde a estudiantes de un curso de Ecuaciones Diferenciales de un programa académico de Ingeniería Civil de una Universidad Pública Colombiana. La selección de los participantes fue realizada mediante muestreo intencional y durante el desarrollo de este proceso se eligieron dieciocho (18) estudiantes. Este tipo de muestreo se caracteriza por un esfuerzo deliberado de obtener muestras "representativas" mediante la inclusión en la muestra de grupos supuestamente típicos (los estudiantes matriculados en los cursos de Ecuaciones Diferenciales del programa académico de Ingeniería Civil). Se selecciona directa e intencionadamente los individuos de la población porque se tiene fácil acceso a ellos.

Los instrumentos que se utilizaron fueron:

Una encuesta aplicada a los estudiantes sobre los métodos a utilizar; se pidió que debían elegir de los siguientes modelos: "dinámica poblacional", "decaimiento radioactivo", "ley de enfriamiento/calentamiento de Newton", "propagación de una enfermedad", "reacciones química" y "mezclas", Zill (2009), dos de los cuales a su consideración representan mayor aplicabilidad en su formación como ingeniero civil. Los modelos con mayor porcentaje de elección fueron: Mezclas y ley de enfriamiento de Newton, razón por la cual se eligió el modelo de mezclas para diseñar la actividad.

Una actividad tipo test con 3 problemas del modelo de mezclas. En la actividad propuesta se integran los enfoques algebraico, gráfico y lenguaje natural, con el apoyo de hojas de trabajo y ambientes dinámicos con el software libre como el Geogebra. Este software utiliza distintos registros de representación semiótica (lengua natural, gráfica, algebraica y numérica) y se puede vincularlos dinámicamente.

Estos problemas permiten realizar traspasos del registro lenguaje natural al algebraico mediante representaciones ejecutables y preguntas que pretenden orientar al estudiante durante el desarrollo de la misma, con el fin de proporcionar herramientas para plantear la ecuación diferencial que se ajusta a los problemas planteados.

El estudiante debe desarrollar las hojas de trabajo con el fin de que logre plantear la ecuación diferencial que se ajusta al problema de mezclas dado, de tal forma que ésta no represente solo una expresión algebraica, sino que por el contrario esta expresión represente la visualización del suceso expresado en lenguaje natural. El Geogebra permite representar objetos variables, esta propiedad se vuelve de gran ayuda para modelar fenómenos cambiantes como los problemas de mezclas.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En el presente artículo, la actividad está fundamentada en el trabajo de Jaimes, & Chaves (2012) y está relacionada con la modelación de problemas de mezclas. Los problemas de mezclas aluden comúnmente a la siguiente descripción: Considere un tanque con una cantidad inicial de □0 galones de salmuera que contiene □0 lb de sal. Otra solución, que contiene □1 lb de sal por galón, es vertida en el tanque a razón de □1 gal/min. Simultáneamente la solución que se encuentra en el tanque sale a una razón de □2 gal/min. El problema es encontrar la cantidad □ de sal en el tanque en cualquier instante. En la actividad planteada, el primer problema tiene por enunciado:

A un tanque que contiene 300 galones de salmuera (es decir, agua en la que se ha disuelto cierta cantidad de libras de sal). Se vierte otra solución con una concentración de sal de 2 libras por galón, a una velocidad de 3 galones por minuto. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae al mismo ritmo que la solución de entrada.

P1. ¿Cuáles son las variables de este modelo? Clasifícalas como dependientes e independientes.

P2. ¿Qué sucede con el nivel y el volumen del líquido, en cualquier instante de tiempo?

P3. ¿Cómo cambia la variable dependiente en función de la variable independiente?

P4.¿Qué cantidad de sal entra por A, en cuaquier momento t?
P5. ¿Qué proceso debes realizar para responder: Qué cantidad de sal sale del tanque en cualquier instante de tiempo? (tenga en cuenta la casilla zoom)
P6. ¿Con qué velocidad cambia la cantidad de sal en cualquier instante de tiempo?

La construcción en Geogebra, para resolver el problema se observa en la Figura 1.

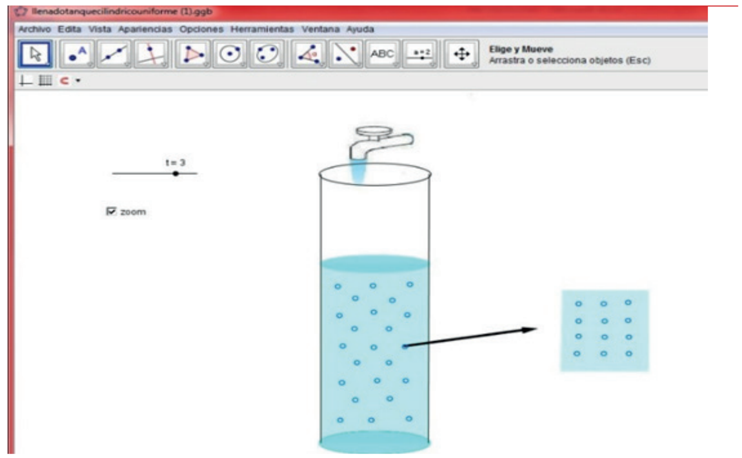

Figura 1. Hoja de trabajo problema 1.

Los resultados de la implementación muestran un desempeño aceptable por parte de los estudiantes: 83% en la P1, 100% en la P2, 37% en la P3, 100% en la P4 y 72% en la P5 y P6. También se puede apreciar que en la pregunta 3 la respuesta dada por el 67% de los estudiantes no corresponde a la esperada en el momento de plantear la actividad, pero se resalta que la respuesta difiere solo por el registro de representación en el que se encuentra, ya que se esperaba que estuviese dada en el registro algebraico, pero como muestran la tabla 1 y la figura 2, fue expresada en el registro lenguaje natural.

Tabla 1.
Errores e incidencia asociados a la pregunta 3 del problema 1

Error asociado a:	Incidencia
Respuesta expresada en el registro lenguaje natural	7
Expresar la función como una razón de cambio	3

1	3 El cambio es proporcional
2	3 El cambio es proporcional
3	La variable dependiente aumenta en función de la variable independiente
4	R= La concentración de sustancias es directamente proporcional al tiempo

Figura 2. Errores cometidos por los estudiantes al resolver la P3

Para el segundo problema, el enunciado dice:

Se considera un tanque que contiene azúcar y agua con los que se prepararán refrescos embotellados. Suponga que el tanque contiene 100 galones de líquido, la cantidad que fluye hacia adentro es la misma que fluye hacia afuera, pero siempre hay 100 galones en el tanque.
El tanque se mantiene bien mezclado, por lo que la concentración de azúcar es uniforme en todo el tanque. El agua azucarada que contiene 5 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo A, a razón de 2 galones por minuto. El agua azucarada que contiene 10 cucharadas de azúcar por galón, entra al tanque a través del tubo B, a razón de 1 galón por minuto. El agua azucarada sale del tanque a través del tubo C a razón de 3 galones por minuto.

La hoja de trabajo (figura 3) permite representar visualmente el enunciado de este problema, el cual difiere del problema 1, solo gráficamente ya que en esencia es un problema de mezclas en el que la velocidad de entrada y salida de líquido son iguales; por lo tanto, al igual que en el problema 1 el volumen permanece constante.

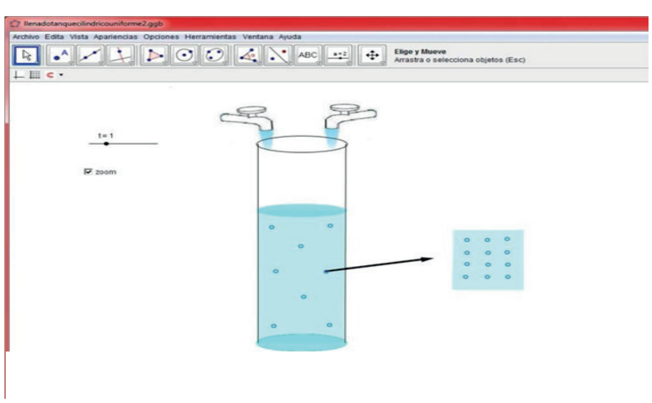

Figura 3. Hoja de trabajo problema 2.

La pregunta planteada en este problema que difiere de las realizadas en el problema 1 es la siguiente: P4. ¿Qué cantidad de azúcar entra en total al tanque en cualquier momento t?

Los porcentajes de éxito obtenidos por los estudiantes en el problema 2 se asemejan a los obtenidos en el problema 1: 72% en la P1, 33% en la P2, 100% en la P3, 94% en la P4 y 56% en las P5 y P6.

Lo anterior muestra que los estudiantes tienen éxito al convertir unidades de medida y a pesar de cambiar las condiciones de llenado del tanque, interpretaron la velocidad de entrada de líquido como la suma de las velocidades de entrada en cada tubo. Los porcentajes más altos de fracaso se presentaron en la pregunta 2 con un 67%, la cual está planteada igual que la pregunta 3 del problema 1, y al igual que ésta los estudiantes expresaron la respuesta en el registro de representación lenguaje natural y se esperaba que estuviese dada en el registro algebraico, la tabla 8 muestra la coincidencia en el número de errores asociados.

Tabla 2.
Errores e incidencia asociados a la pregunta 3 del problema 2.

Error asociado a:	Incidencia
Respuesta expresada en el registro lenguaje natural	9

Finalmente el problema 3 de la actividad planteada tenía por enunciado:

Un tanque grande de mezcla inicialmente contiene 200 galones de agua disuelta con 50 Lb de sal (salmuera). Otra solución de salmuera se inyecta en el tanque a una velocidad de 3 galones por minuto; en este flujo de entrada, la concentración de sal es de 2 libras por galón. Cuando la solución se mezcla bien en el tanque, se extrae a una velocidad de 2 galones por minuto. Si el tanque tiene tapa abierta y una capacidad total de 300 galones, responde:

1. En qué tiempo se derramara el líquido.

2. Cuantas libras de sal habrá en el tanque al instante del derrame.

3. Grafique la solución en Geogebra y responda: ¿Cuántas libras de sal hay en el tanque cuando □→ ∞? ¿Coincide con lo que usted creería sin haber hecho ningún proceso?

Este problema difiere de los problemas 1 y 2, y para su solución el estudiante debe hacer uso de todas las herramientas como el cambio de registro del lenguaje natural al algebraico, cambio de representación ejecutable al registro algebraico, e interpretación de la variación presente en un problema de mezclas, razonamiento para abordar cualquiera de los tres problemas mencionados.

La hoja de trabajo proporciona la representación visual del problema permite observar que a medida que avanza el tiempo el volumen de líquido en el recipiente aumenta, lo cual induce a pensar que en algún instante el líquido se derrama, conservando la representación de distribución uniforme de la sustancia en el líquido.

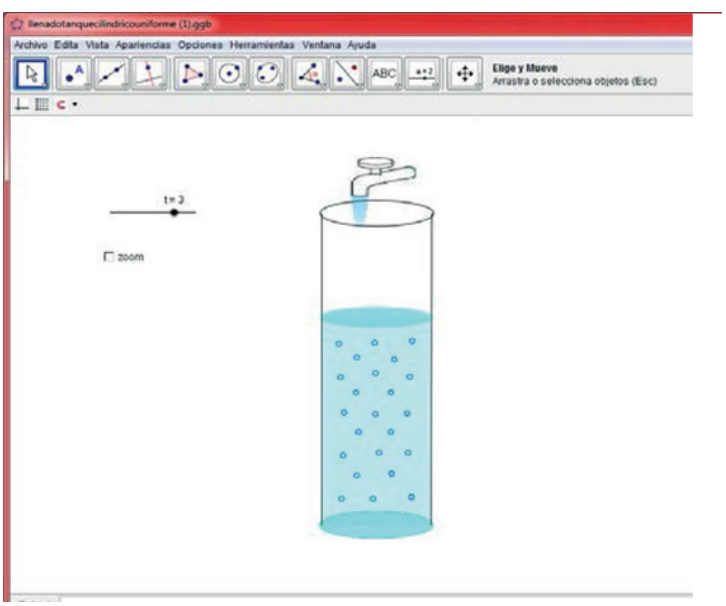

Figura 3. Hoja de trabajo problema 3.

En este problema el 67% de los estudiantes plantearon y resolvieron la ecuación diferencial del problema 3, obteniendo éxito en el traspaso de registro lenguaje natural al algebraico las preguntas planteadas en este problema no coincidían con las de los problemas 1 y 2, pero se esperaba que estas sirvieran como herramienta para que el estudiante tuviese éxito al plantear la ecuación que modelaba el problema.

4. CONCLUSIONES

Al desarrollar la actividad propuesta se encontraron dificultades, como las halladas por (Zang, Fernández, y León, 2013) en temas que son considerados prerrequisitos de la asignatura Ecuaciones Diferenciales, como resolución algebraica, notación y teoremas sobre las derivadas, concepto de antiderivada y teorema fundamental del cálculo, que impiden que la implementación de recursos tecnológicos, como el Geogebra, contribuya al estudiante a tener éxito en el traspaso de registros.

Las dificultades encontradas durante la implementación de la actividad propuesta coinciden con Guzmán (1998) quien menciona que en la mayoría de casos los estudiantes prefieren expresar la respuesta en el mismo registro en el cual está planteada la pregunta, sin coordinar explícitamente los otros.

Se observa que algunos estudiantes van más allá de la representación de monoregistros, gracias a las cualidades de exploración, descubrimiento y modelación que proporciona el entorno de Geogebra, por lo que el medio educativo debe mantenerse atento a las alternativas didácticas que nos ofrecen este tipo de recursos tecnológicos.

De todas formas con la implementación de estas actividades con el apoyo de recursos tecnológicos, se da un giro al proceso de enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales, ya que tradicionalmente está dedicada a la resolución algebraica (Hernández, 1994), dejando de lado la interpretación geométrica. Esto se observa en el hecho de que los estudiantes tienen dificultad para resolver problemas que involucren simultáneamente distintos registros de representación.La creación de este ambiente educativo permitió la interacción profesor-estudiante-material didáctico, proporcionando posiblemente condiciones favorables para el aprendizaje significativo (Dullius M., 2009), ya que los estudiantes pudieron seguir desarrollando habilidades matemáticas e ir más allá de la mera aplicación de técnicas para resolución de las ecuaciones y que el tiempo, antes dedicado a los cálculos asociados al problema, se pudo utilizar para centrarse en el proceso de análisis e interpretación de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones en relación a los fenómenos que pretenden modelar.

5. REFERENCIAS

De las Fuentes, M.; Arcos, L.; Navarro, C. (2010). Impacto en las Competencias Matemáticas de los Estudiantes de Ecuaciones Diferenciales a partir de una Estrategia Didáctica que incorpora la Calculadora. Formación Universitaria, 3(3), 33-44.

Dullius, M.M. (2009). Enseñanza y aprendizaje en Ecuaciones Diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico (Tesis Doctoral). Universidad de La Rioja, Burgos, España. Recuperado de http://documat.unirioja.es/servlet/portadatesis

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. La Gaceta de la RSME, 9(1), 143-168.

Guzmán, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. Relime, 1(1), 5- 21.

Hernández, A. (1994). Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, algebraico y gráfico en relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Cuaderno de Investigación, 30, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav.

Hidalgo, S.; Maroto, A.; Palacios, A. (2004). ¿Por qué se rechazan las matemáticas? Análisis evolutivo y multivariante de actitudes relevantes hacia las matemáticas. Revista de Educación, 334, 75-95.

Jaimes, L.A; Chaves, R.F. (2012). Propuesta de actividades para abordar problemas de mezclas en un curso de ecuaciones diferenciales mediante el apoyo de software libre “Geogebra” (Tesis de especialización). Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia.

Lupiañez, J. (2000). Nuevos Acercamientos a la Historia de la Matemática a través de la Calculadora TI-92. Universidad de Granada, Granada.

Ministerio de Educación Nacional. (2004). Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales. Bogotá: Enlace Editores Ltda.

Morales, Y.; Salas, O. (2010). Incorporación de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO). Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 5(6), 155-172.

Nápoles, J.; González, A.; Genes, F.; Basabilbaso, F.; Brundo, J. (2004). El enfoque histórico-problémico en la enseñanza de la matemática para ciencias técnicas: el caso de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Acta Scientiae, 6(2), 41-59.

Rivas, P. (2005). La Educación Matemática como factor de deserción escolar y exclusión social. Educere, 9(29), 165-170.

Vasco, C. (2006). Pensamiento Variacional y modelación matemática. Universidad del Valle, Universidad de Manizales.

Zill G.; Cullen M. (2009). Ecuaciones Deferenciales con problemas de valores en la frontera. México: McGraw-Hill.

Mundo Fesc
No.11,Enero-Junio
2016
ISSN:2216-0353
E-ISSN:2216-0388
PP:7-15