

# Aplicación del aprendizaje basado en problemas en cursos de ingeniería – caso problema: “el efecto dominó”

## Application of problems-based learning in engineering courses - problem case: "domino effect"

<sup>a</sup>Maicol Cárdenas-Hernández, <sup>b</sup>Eduardo Rodríguez-Araque

 <sup>a</sup> Magister en Ciencias Físicas, Maicol.cardenash@unicafam.edu.co, Fundación Universitaria Cafam, Bogotá, Colombia  
 <sup>b</sup> Doctor en Ingeniería, eduardo.rodrigueza@unicafam.edu.co, Fundación Universitaria Cafam, Bogotá, Colombia

**Recibido:** Marzo 10 de 2020 **Aceptado:** Junio 18 de 2020

**Forma de citar:** M. Cárdenas-Hernández y E. Rodríguez-Araque “Aplicación del aprendizaje basado en problemas en cursos de ingeniería- caso problema: “el efecto dominó”, *Mundo Fesc* vol. 10, no. 19, pp. 202-218, 2020

### Resumen

El trabajo mostrado en este artículo surge de una experiencia en la aplicación de una estrategia extracurricular, que busca mostrar cómo se pueden integrar diferentes unidades de aprendizaje (asignaturas) haciendo énfasis en la importancia de las competencias que se desarrollan en ellas. La metodología utilizada se fundamenta en el enfoque de la investigación-acción, que articula permanentemente la investigación, la acción y la formación, en donde el educador investiga sobre sus propias acciones. Tomamos en la práctica del docente el aprendizaje basado en problemas, un método didáctico del dominio de las pedagogías activas, basada en el aprendizaje por descubrimiento y construcción. Se aplica el Aprendizaje Basado en Problemas utilizando el método de los siete saltos en estudiantes de pregrado con diferentes niveles de competencias académicas e investigativas, allí estudiaron la dinámica de un pulso a lo largo de una cadena finita de fichas de dominó, buscando calcular la velocidad de propagación. La velocidad de propagación del efecto dominó fue calculando por estudiantes con competencias en resolución matemática de problemas de semestres avanzados (7<sup>o</sup> y 8<sup>o</sup>), proporcionando una expresión analítica en función de la altura de la ficha y la distancia de separación entre ellas, verificado con resultados experimentales realizados por estudiantes de 2<sup>o</sup> y 3<sup>o</sup> semestre de Ingeniería, que se encuentran en procesos de fortalecimiento de sus competencias en análisis de datos experimentales y uso de TIC. Se plantea para futuras experiencias el uso de inteligencia artificial, aplicando redes neuronales artificiales para dar una perspectiva diferente a la solución del problema, enfatizando las competencias digitales.

**Palabras clave:** Aprendizaje Basado en Problemas, competencias, enseñanza, inteligencia artificial, matemáticas, ondas.

Autor para correspondencia:

\*Correo electrónico: Maicol.cardenash@unicafam.edu.co



**Abstract**

The work shown in this article arises from an experience in the application of an extracurricular strategy, which seeks to show how learning units (courses) can be integrated, emphasizing the importance of the skills developed in them. The applied methodology is based on the research-action approach, which permanently articulates research, action and academic training, where the teacher investigates about his own actions. In the praxis of the teacher, problem-based learning is applied, a didactic method of the domain of active pedagogies, based on learning by discovery and construction. Problem Based Learning is applied using the seven-jump method in undergraduate students with different levels of academic and investigative skills studied the dynamics of a pulse along a finite chain of dominoes, seeking to calculate the speed of propagation. The problem was approached from theory and experimentation in different learning units and academic semesters. The speed of propagation of the domino effect was calculated by students with skills in mathematical problems resolution of advanced semester (7<sup>o</sup> and 8<sup>o</sup>), providing an analytical expression based on the height of the file and the separation distance between them, verified with experimental results carried out by students in 2<sup>o</sup> and 3<sup>o</sup> semester, which are in the process of strengthening their skills in experimental data analysis and ICT use. It is proposed for future experiences the use of artificial intelligence, applying artificial neural networks to give a different perspective to the solution of the problem, emphasizing digital skills.

**Keywords:** Problems-based learning, skills, teaching, artificial intelligence, mathematics, waves.

**Introducción**

En tiempos de rápido y profundos cambios sociales, políticos, económicos y sociales que impactan el diario vivir de las personas, las organizaciones y los estados, la sociedad del conocimiento nos muestra que, debemos trabajar en función de generar los espacios necesarios para que la sociedad tenga una educación inclusiva y de calidad, con procesos de aprendizaje continuo con el fin de mantener y adquirir las habilidades, capacidades y competencias necesarias, para una mejor y apropiada transición al mercado laboral.

Dentro de la economía del conocimiento, los procesos de enseñanza-aprendizaje basados en memorización de hechos y procedimientos no son suficientes para afrontar los retos, problemas y dificultades propios de las organizaciones y del entorno profesional.

Se debe complementar el proceso con el desarrollo de habilidades, capacidades y actitudes enfocadas a la solución de problemas, pensamiento crítico, habilidades para trabajo colaborativo, creatividad,

estructuras y pensamiento computacional, autorregulación, compromiso, junto con valores éticos y ciudadanos, los cuales son esenciales, hoy más que nunca.

Resulta importante destacar las Tecnologías de la Información y Comunicaciones (TIC), junto con las competencias digitales, como herramientas que potencian las habilidades, capacidades y actitudes arriba mencionadas.

Ahora bien, particularmente los autores piensan que para lograr un adecuado y eficaz proceso de enseñanza-aprendizaje, el docente como un actor clave, que no solo entrega conocimientos, expone ideas, teorías, procedimientos, entre otros, debe ampliar su participación, a través del papel de mediador, facilitador y potenciador del aprendizaje, desarrollando estructuras metodológicas que logren producir cambios significativos en los estudiantes, haciéndolos más responsables y activos de su propio aprendizaje, mejorando así sus estructuras internas de conocimiento.

Nos encontramos en un espacio de modelos metodológicos que buscan cambiar el papel

pasivo y receptor de información que tiene el estudiante de educación superior, centrando los procesos de enseñanza-aprendizaje en el estudiante.

Es así como los docentes buscamos salir de la zona de confort, y estructurar formas y prácticas diferentes, motivadoras y activas que complementen las actividades tradicionales en las aulas de clase, es decir entendiendo la enseñanza tradicional al desarrollo de la clase centrada totalmente en el docente y basada en memorización de datos y procedimientos.

Para tal fin, existen un número muy grande en las tendencias pedagógicas, y enfocando nuestro estudio en el aprendizaje basado en problemas (ABP), que en su momento fue una propuesta innovadora, y que se caracteriza por centrar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudiante, estimulando habilidades, capacidades y actitudes alrededor del pensamiento crítico, a través de generar solución a problemas como punto de partida para la adquisición, integración y apropiación de nuevos conocimientos [1].

Este método, entrega al estudiante la responsabilidad de su propio aprendizaje, promoviendo una cultura de trabajo colaborativo, el desarrollo de habilidades interpersonales, valorando en gran medida el trabajo en equipo e interdisciplinario, permitiendo al estudiante darse cuenta de sus propios procesos de pensar y aprender, y que esta forma de pensamiento permite su mejor desarrollo y desempeño, no solo académico, también su desempeño en la vida profesional [2].

El ABP planteado y confeccionado en la Universidad de McMaster, en Canada, entre los años 60's y 70's, es un método de la didáctica que se encuentra en el espacio de las estrategias de aprendizaje por descubrimiento y construcción, donde

el estudiante es protagonista de su propio aprendizaje, logra apropiarse de su proceso constructivo de conocimiento, se encarga de buscar, seleccionar y organizar la información, y con ello intenta dar solución al problema. Este es un proceso que lleva implícitamente la aplicación del método científico [3].

Y nos ofrece para el quehacer docente una estrategia que logra potenciar en los estudiantes habilidades relacionadas con el pensamiento crítico y el trabajo colaborativo, aspectos importantes que desarrollan y mejoran la estructura interna de conocimiento, permitiendo un mejor desempeño de los actuales y futuros profesionales [4].

La estructura de ABP comienza con la adecuada formulación del problema, buscando promover en el estudiante actitudes y acciones para identificar, investigar e interiorizar los conceptos, teorías y principios necesarios para dar solución al problema [5], problema que por su estructura intenta motivar y provocar un conflicto cognitivo en el estudiante [2].

De acuerdo con [6], el aprendizaje de mayor relevancia, significativo y que trasciende en el tiempo se genera como consecuencia de un conflicto cognitivo, tal conflicto se convierte en el motor afectivo indispensable para alcanzar aprendizajes significativos y lograr recuperar el equilibrio perdido debido al conflicto generado por el problema retador. Al final del proceso se espera que las estructuras de pensamiento se vean modificadas, garantizando el aprendizaje.

Pasando al diseño y práctica del ABP en el quehacer docente, en unidades de aprendizaje de ciencias básica y otras relacionadas con competencias genéricas de razonamiento matemático de diferentes semestres académicos, se ha planteado una

experiencia con ABP que pretende generar un pensamiento crítico y habilidades en trabajo colaborativo alrededor de los fenómenos físicos de propagación de ondas en medios mecánicos, utilizando pre-conceptos de física y matemáticas, de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la Fundación Univerdsitaria Cafam.

Es importante indicar que las competencias genéricas de razonamiento matemático, lectura crítica y comprensión lectora en los programas de ingeniería han venido siendo evaluadas a través de pruebas estandarizadas diseñadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES), a través de las Pruebas SaberPRO. Estas pruebas han mostrado en los últimos años ser un indicador de la calidad de la educación superior, con base en métricas de valor agregado y aporte relativo de las instituciones de educación sobre sus egresados [7].

A partir de lo anterior, centramos la aplicación de ABP con base en las competencias genéricas, sobre las cuales los cursos de ciencias básicas y de ingeniería son fundamentales para el buen desarrollo académico de los estudiantes.

Se plantea el problema a partir del trabajo en [8] [9], dado sus características apropiadas para ser desarrollado en diferentes unidades de aprendizaje de los programas de ingeniería.

Cabe indicar que, no solo buscamos desarrollar y afianzar actitudes y habilidades en pensamiento crítico, también buscamos desarrollar habilidades en competencias digitales relacionadas con inteligencia artificial [10], y que será parte de un próximo trabajo, donde buscaremos generar actitudes, habilidades y pensamiento computacional, a través de ABP.

En las siguientes secciones encontrarán la metodología de la investigación, la metodología ABP junto con la secuencia y organización didáctica sobre el problema planteado, utilizando el método de los siete saltos [3]. Se mostrarán las experiencias realizadas en las diferentes unidades de aprendizaje (asignaturas) donde se aplicó y los resultados obtenidos de las experiencias. Se presentará el problema seleccionado con el detalle y estructura matemática, el análisis físico/matemático y los resultados propios del problema generados por los estudiantes. Finalmente, se presentarán las conclusiones generadas de la experiencia con ABP y los resultados propios del problema.

### **Materiales y Métodos**

La metodología utilizada se fundamenta en el enfoque de la investigación-acción, que articula permanentemente la investigación, la acción y la formación, y donde el educador investiga sobre sus propias acciones [11].

A su vez, el autor en [12], señala que la investigación-acción busca mejorar y/o transformar la práctica educativa y una mejor comprensión de ésta, articulando permanentemente la investigación, la acción y la formación. Algo muy importante y señalado en [12] es que, los involucrados en la investigación, en este caso los estudiantes, se convierten en coinvestigadores y, al mismo tiempo beneficiarios de los hallazgos y/o soluciones. Convirtiéndose en un proceso donde la acción y los procesos educativos al interior del aula de clase se convierten en objeto de estudio y donde los actores que se encuentran en el aula son investigadores y receptores de los resultados y con una postura de reflexión crítica frente al proceso y los hallazgos.

Ahora bien, para abordar el enfoque metodológico, se definieron un conjunto de procesos, basados en la metodología ABP,

como una forma de planificación, para luego sobre esta misma metodología, desarrollar las acciones, observaciones y reflexiones [13].

El objetivo instruccional desarrollado a partir de ABP fue conocer los fenómenos físicos de la propagación de un pulso a través de medios mecánicos utilizando conceptos de física y técnicas analíticas implementando modelamiento matemático y práctica experimental.

Este es uno de los objetivos que se deben desarrollar en las unidades de aprendizaje del área de ciencias básicas de los programas de Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicaciones. Estas unidades de aprendizaje (asignaturas) son el Cálculo Diferencial y Fundamentos de Electromagnetismo, cursos impartidos en segundo y tercer semestre, respectivamente.

Adicionalmente, se aplicó el problema en las unidades de aprendizaje de Ondas Electromagnéticas (Electrodinámica), Implementación de Funciones Especiales (Matemáticas avanzadas) y Conceptualización Cuántica de fenómenos aplicables a la Teleinformática (Física Moderna), cursos impartidos en sexto, séptimo y noveno semestre, respectivamente.

La Estructura Instruccional del problema bajo la metodología ABP, los grupos conformados en cada una de las Unidades de Aprendizaje y los semestres donde se aplicó el Método ABP bajo el problema del Efecto Dominó se puede observar con detalle en la Tabla 1.

### **El Método ABP y su Implementación.**

Aquí mostraremos como la estructura ABP se logra aplicar y volverla una realidad en la didáctica unidades de aprendizaje de ciencias básicas y otras asignaturas relacionadas con estas, pero del área específica de los

programas de Ingeniería Industrial e Ingeniería de Telecomunicaciones.

Como se indicó, se seleccionaron cursos con diferentes niveles de conocimiento y capacidades, en relación a competencias genéricas y razonamiento matemático, específicamente.

Esto con el objeto e intención de establecer relaciones del nivel de conocimientos con que cuenta el estudiante que se enfrenta al problema, considerando también que, el problema no sea trivial o básico para estudiantes de los niveles o semestres superiores, y por ende no logre generar el conflicto cognitivo que se busca con ABP.

Aplicamos ABP bajo el método de los siete saltos [3], el cual organiza la secuencia didáctica de forma tal que se ajusta a las necesidades del problema de estudio. La secuencia en su orden es:

- Salto #1: *Planteamiento del problema.* Aquí el docente es mediador y orientador, es quien propone el problema.
- Salto #2: *Dar Claridad a los términos, requerimientos y condiciones del problema,* a fin de dar claridad del problema y que los estudiantes tengan una comprensión del problema.
- Salto #3: *Análisis del Problema.* Es importante realizar un análisis inicial, con el fin de establecer si el problema genera derivaciones o varias tareas que suponen pequeños problemas a resolver que permiten dar cierta facilidad en la resolución del problema principal.
- Salto #4: *Planteamiento de hipótesis.* En este espacio los estudiantes presentan hipótesis dando explicación sobre la solución tentativa y se somete a discusión, a partir de su propia concepción teórica y conocimientos



adquiridos.

- Salto #5: *Objetivos de aprendizaje complementarios*. Donde se determinan los tópicos y temas adicionales requeridos por el problema y que deben ser consultados y profundizados.
- Salto #6: *Tiempo de estudio de forma individual y/o consulta a expertos*, y otro tipo de consulta (puede ser bibliográfica), con el fin de dar soporte y sustento a las hipótesis planteadas.
- Salto #7: *Al final de los saltos se realiza una discusión*, donde se busca descartar hipótesis (producidas en el salto #4, Planteamiento de Hipótesis) y sintetizar la solución del problema.

Finalizando el proceso de los 7 saltos, buscamos que los actores del proceso intercambien opiniones, discutan sus experiencias y se desarrolle una evaluación teniendo en cuenta los objetivos instruccionales, sin dejar de lado una evaluación de la experiencia misma sobre la base de si el problema logró generar un conflicto cognitivo. Los resultados obtenidos de esta experiencia serán mostrados en la siguiente sección, a partir de la exposición de cada salto y de cómo estos van definiendo la línea de trabajo de los estudiantes.

Finalizando el proceso de los 7 saltos, buscamos que los actores del proceso intercambien opiniones, discutan sus experiencias y se desarrolle una evaluación teniendo en cuenta los objetivos instruccionales, sin dejar de lado una evaluación de la experiencia misma sobre la base de si el problema logró generar un conflicto cognitivo. Los resultados obtenidos de esta experiencia serán mostrados en la siguiente sección, a partir de la exposición de cada salto y de cómo estos van definiendo la línea de trabajo de los estudiantes.

## El Problema del Efecto Dominó.

El problema planteado, no buscó ser un problema de un tema específico de una unidad de aprendizaje. Se identificó un problema donde lograrse ser aplicado a estudiantes de diferentes semestres, y por ende con diferentes niveles de conocimiento y desarrollo de su programa académico. También, el problema se desarrolló en dos programas, Ingeniería de Telecomunicaciones e Ingeniería Industrial.

El efecto dominó se puede definir como un conjunto correlativo de sucesos, en donde un movimiento previo conduce a uno nuevo, tanto espacial como temporal.

La caída sucesiva de estas fichas alineadas desencadena una transmisión de energía que ejerce una fuerza sobre la siguiente ficha. Para estudiar la velocidad de propagación de un pulso en una cadena sucesiva de fichas de dominó debemos construir gráficos y tomar datos experimentales que darán cuenta del comportamiento de éste.

Este problema es propuesto en muchos trabajos teóricos por su dificultad [9]. En la Figura 1, se observa el sistema físico del problema, mostrando la dinámica del efecto dominó y las variables.

## Resultados y Discusión.

En esta sección presentamos la metodología ABP bajo los siete saltos, asociando en cada salto las actividades relacionadas al problema. Adicionalmente, presentamos una discusión sobre las experiencias obtenidas en cada unidad de aprendizaje, con el fin de identificar las dificultades de cada grupo en función de los niveles de conocimiento.

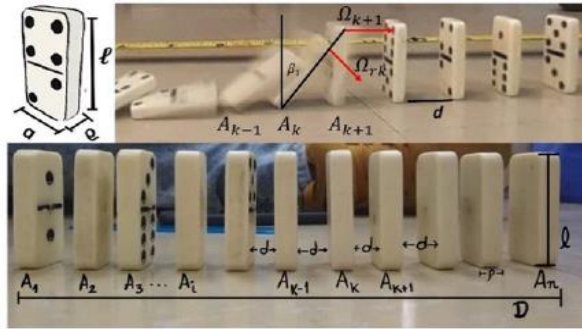


Figura 1. Sistema físico del problema con la definición de sus variables que implica el estudio de temas como las leyes de conservación.

### Desarrollo de los 7 Pasos Sobre el Problema de Estudio.

Dentro de la secuencia de los siete pasos, nuestro punto de partida, y salto #1, es el planteamiento del problema. El problema fue planteado en cada una de las unidades de aprendizaje, a través del siguiente enunciado: *¿Qué tan rápido se propaga un pulso mecánico cuando se propaga al caer las fichas de dominó?*

Este enunciado, fue soportado por los dos trabajos en [8] [9], para que los estudiantes tuvieran un mínimo de información relacionada al problema que buscábamos resolver.

Escuchar una discusión sobre la teoría de fenómenos encadenados nos llevó a preguntar sobre el problema físico. Se propone al estudiante establecer sus propios supuestos simplificadores "razonables", como fichas de dominó perfectamente elásticas, coeficiente de fricción constante entre fichas y la mesa, la configuración inicial con fichas igualmente espaciadas en línea recta, sucesivamente.

En la Tabla 1 se presentan los meta-objetivos que se buscaron con ABP, los tiempos de aplicación de la metodología, y la conformación de los grupos de trabajo de las Unidades de Aprendizaje donde se abordó el problema.

Continuando con el salto #2, tenemos que, al profesor le corresponde dar claridad a las condiciones, términos y requerimientos del problema, para que el enunciado del problema no se preste a equivocadas o incorrectas interpretaciones. Por tanto, el profesor indicó que el propósito del problema bajo estudio es descubrir cómo se relaciona la velocidad de una reacción en cadena con los parámetros que determinan el efecto dominó.

Explicándole al estudiante que, el efecto dominó se basa en reacciones en cadena que son llevadas a cabo por fichas que sistemáticamente generan una secuencia de movimientos lineales que, partiendo de un estado inicial de reposo total y que con un leve desequilibrio (pequeña fuerza de empuje), perturba este estado generando sobre la ficha vecina un desequilibrio, propagando el pulso de una ficha sobre la otra, como se muestra en la Figura 2.

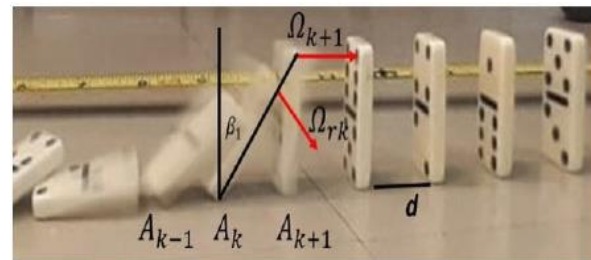


Figura 2. Efecto de propagación del pulso de una ficha sobre la siguiente, en el efecto dominó

En este salto (#2), es importante que, el profesor entre a definir las variables que intervienen en el modelo teórico (estas variables se explicarán en detalle en el salto #6). Dando especial énfasis en cómo la física y las matemáticas logran dar una explicación del efecto dominó, y como este efecto nos introduce a conceptos de velocidad, propagación de ondas mecánicas.

**Tabla 1.** Estructura Instruccional del problema bajo la metodología ABP. Cada grupo conformado en cada una de las Unidades de Aprendizaje fue conformado por 3 estudiantes.

|                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| <b>Meta-Objetivos de aprendizaje.</b> | Conocer fenómenos físicos de propagación de ondas en medios mecánicos, utilizando los pre-conceptos en física.   |
|                                       | Definir variables y constantes relevantes en la propagación del pulso a través de las fichas de dominó.  |
|                                       | Medir de forma correcta en el sistema métrico internacional y los errores experimentales de las variables y constantes relevantes en la propagación del pulso a través de las fichas de dominó, con ayuda de equipo básico de laboratorio. |
|                                       | Identificar la relación entre las variables en la dinámica de efecto dominó para ser medidas y comparadas en modelos teóricos.   |
|                                       | Determinar por métodos físico-matemáticos adecuada la velocidad de propagación del pulso en función de las variables y constantes relevantes en la propagación del pulso a través de las fichas de dominó.                                 |
| <b>Problema</b>                       | ¿Qué tan rápido se propaga un pulso mecánico cuando se propaga al caer las fichas de dominó?   |
| <b>Tiempo de duración.</b>            | Las prácticas de laboratorio se pueden tomar hasta dos sesiones de práctica y una sesión para el análisis de datos, este será evaluado con la fiabilidad del error experimental menor al 10% como es usual                                 |
|                                       | Para los modelos teóricos se puede llegar a invertir más de cuatro sesiones para tener el modelo completo, este se evaluará al compararse con los resultados experimentales y su aproximación a estos.                                     |
| <b>Grupos de trabajo</b>              | Cálculo Diferencial (2o. Semestre): 7 grupos (21 estudiantes)  |
|                                       | Fundamentos de Electromagnetismo (3er. Semestre): 5 grupos (12 estudiantes)  |
|                                       | Ondas Electromagnéticas (6o. Semestre): 4 grupos (8 estudiantes)   |
|                                       | Implementación de Funciones Especiales (7o. Semestre): 3 grupos (6 estudiantes)  |
|                                       | Conceptualización Cuántica de fenómenos aplicados al tráfico telemático (9o. Semestre): 2 grupos (2 estudiantes)   |

Una vez establecidas las condiciones del problema, saltamos al análisis del problema (Salto #3). En este salto, el docente interviene en el proceso para orientar el análisis del problema, buscando que el grupo de estudiantes interprete muy bien el problema, y se generen algunas aproximaciones de solución. En el debate entre estudiantes y docente sobre el problema, se llegan a dos posibles formas de abordar y de aproximarse a la solución. La primera aproximación es la empírica experimental, donde se busca medir la velocidad de propagación ubicando una serie de fichas de dominó en una hilera, y proceder a realizar mediciones de tiempo y distancia.

Para tal fin, los estudiantes propusieron un experimento, que parte de la medición de la geometría de las fichas de dominó que seleccionaron, utilizando el calibrador.

Posteriormente, los estudiantes tomaron 15 fichas y las colocaron verticalmente, una frente a la otra (utilizando metro y reglas), las alinearon y ajustaron la distancia de separación entre ellas. Una vez que todas las piezas estuvieron en su posición, se procedió a producir el desequilibrio en la primera pieza

con una pequeña fuerza, y simultáneamente un cronómetro se puso en marcha, cuando la última ficha cayó, el cronómetro se detuvo, y se procedió a tomar el tiempo.

En el experimento los estudiantes decidieron realizar 5 repeticiones modificando la distancia de separación entre piezas de dominó, con el fin de conocer la dependencia de la velocidad con la separación entre las fichas de dominó. En la Figura 3, se observan algunas imágenes tomadas durante el desarrollo del experimento.

Es importante indicar, que en la experimentación buscamos que el estudiante incorpore capacidades en la toma de datos y generación de reportes, afianzando competencias de redacción de documentos, donde se exponga conocimientos en los análisis del error de las mediciones.

En la segunda aproximación, los estudiantes de semestres superiores y con un poco más de conocimientos adquiridos en cálculo avanzado, proponen analizar un modelo teórico que logre explicar el fenómeno físico del problema.





Figura 3. Desarrollo del experimento por parte de los alumnos de las diferentes unidades de aprendizaje (asignaturas).

Una vez realizado el salto #3, los estudiantes al interior de sus grupos procesan la información obtenida, realizan sus análisis con base en sus conocimientos previos y concepciones teóricas, generando hipótesis alrededor del problema basados en los resultados experimentales, esto es lo que se deseaba obtener en el salto #4.

Ejemplos de explicaciones tentativas (hipótesis del problema del efecto dominó), generadas en este salto, de algunos grupos de trabajo se presentan a continuación.

*“A medida que la distancia entre las fichas de dominó sea más corta ( $d$ ), menor será la distancia de un extremo al otro ( $D$ ) y consecuentemente las fichas caerán en menor tiempo, de manera contraria, si aumenta la distancia entre las fichas ( $d$ ), mayor será la distancia de un extremo al otro, y evidentemente el tiempo en que caen todas las fichas será mayor. Estamos viendo al parecer una relación directamente proporcional, por dicha razón creemos que será una gráfica lineal”.*

*“Entre menor distancia el tiempo de caída disminuye. La gráfica mostraría un decrecimiento ya que entre menos distancia más rápido cae la hilera. A mayor cantidad de fichas en el experimento, mejor y más detallados datos”.*

*“La velocidad no depende de la distancia de las fichas, es decir, es constante y cambia a la hora de aplicarle fuerza a la primera ficha del dominó por eso se observan dispersiones en los datos repetitivos de la práctica.”*

Como vemos los estudiantes encuentran la dependencia de la velocidad de propagación con la separación de las fichas ( $d$ ), sin importar el nivel académico, la experimentación arroja luz a sus hipótesis y rápidamente pasan a ser descartadas o modificadas.

Entrando al salto #5, de acuerdo con los profesores del área de ciencias básicas de la Facultad de Ingeniería de la Institución, las competencias específicas que se consideran importantes para desarrollar con ABP son: identificar, indagar, explicar, comunicar, trabajar en equipo, disposición para aceptar que el conocimiento tiene naturaleza cambiante, disposición para reconocer que es actor en el desarrollo del conocimiento y ser responsable con él, y que encontramos en [14].

Pero, debemos enfatizar en objetivos complementarios relacionados con la capacidad de comunicar, donde escuchar, estructurar y plantear puntos de vista, y compartir conocimiento son complementarios en las competencias específicas en la formación de un ingeniero.

Por tanto, buscamos que los estudiantes a través del problema comuniquen de forma clara, precisa y adecuada, no solo sus explicaciones tentativas, también lograr generar reportes muy bien detallados de lo realizado en la experimentación, que den razón de su trabajo como ingeniero.

Adicionalmente, el docente debe orientar a los estudiantes en el desarrollo de objetivos instruccionales secundarios. Esto implica identificar temas y tópicos que deben ser estudiados y profundizados, esta actividad

sirve de transición hacia el salto #6.

En el salto #6, los estudiantes dedicaron tiempo de trabajo individual para realizar consultas de los tópicos/temas de profundización, buscando dar un sustento teórico a las hipótesis y explicaciones tentativas del problema. Cabe indicar que todos los estudiantes no tienen los mismos conocimientos previos y estructuras matemáticas para establecer una solución formal y completa al problema, pero si están en capacidad de indagar con expertos y material bibliográfico a fin de dar una muy buena aproximación al problema (sea experimental o analítico).

En este salto, buscamos que el estudiante afronte con responsabilidad, la necesidad de incorporar conocimientos, teorías y técnicas matemáticas que le permitan desarrollar el problema.

Finalmente, llegamos al salto #7, desarrollando una discusión final entre estudiantes y su docente mediador. Aquí las hipótesis correctas fueron seleccionadas y las más incorrectas desechadas. Una muestra de las hipótesis y explicaciones tentativa que lograron un acercamiento a la solución del problema, se presentan a continuación.

“Realizando este laboratorio logramos evidenciar que a medida que disminuye la distancia entre cada una de las piezas del dominó, la velocidad aumenta y el tiempo de caídas de estas va disminuyendo relativamente.”

*“Entre más unidas las fichas de dominó, menos tiempo tomaran estas en caer. Entre menor sea la distancia entre las fichas la velocidad es mayor.”*

*“La velocidad de la reacción en cadena no es independiente de la separación entre las fichas”*

*“El peso y el tamaño de la ficha no interfiere en nada mientras la hilera caía. Entre menor distancia el tiempo de caída disminuye. La grafica mostraría un decrecimiento ya que entre menos distancia más rápido cae la hilera.”*

### **Discusión Alrededor de la Experiencia con ABP**

Durante la experiencia, las dificultades más relevantes relacionadas con la experimentación se centran en las mediciones, es decir, los estudiantes no utilizan adecuadamente los instrumentos de medición como es el vernier. Este tipo de problemas deben ser subsanados de inmediato con una explicación del docente, generando su aprehensión y fortalecimiento. Este es solamente un ejemplo, pero en la práctica pueden generarse otros problemas relacionados a los conocimientos previos necesarios, que deben ser afrontados como estudio autónomo y la práctica en el laboratorio.

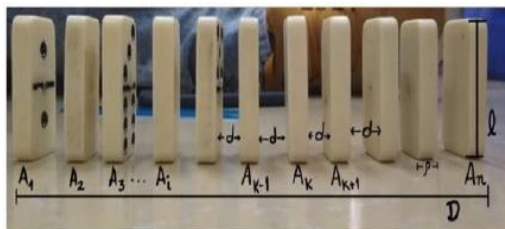
Algunas diferencias por resaltar en el desarrollo de la actividad, es la estructura de organización que utilizan los estudiantes de los diferentes semestres. Mientras que, los alumnos de primeros cursos comienzan el proceso investigativo y cometen errores de procedimiento en el desarrollo de la actividad, los estudiantes de los semestres avanzados tienen una mejor estructura investigativa y logran depurar procesos y procedimientos rápidamente, esto nos muestra las competencias investigativas que desarrollan durante su proceso académico.

Para efectos de reproducción del problema, el cual puede servir a otros docentes investigadores en implementación de ABP, mostramos el modelo teórico del problema en la siguiente sección.

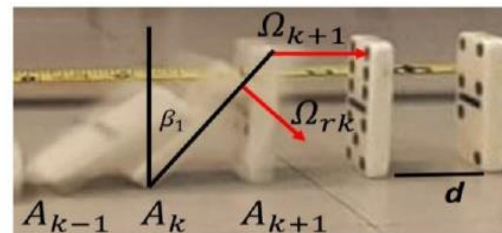
## Desarrollo del Modelo Teórico del Problema

Creemos importante, no solo describir la experiencia con ABP. También, desarrollar el análisis teórico del problema, teniendo en cuenta el planteamiento desarrollado por los autores en [8] [9]. Inicialmente, asumimos ciertas condiciones del problema, a saber [9].

- La cadena de fichas es uniforme. Es decir, todos los dominós son idénticos y están igualmente espaciadas a lo largo de una línea recta.  $\ell$  será la altura de cada ficha y  $m$  la masa en la parte superior.
- Las colisiones son de frente. Esto significa que, visto desde arriba, todas las fichas están y permanecen alineadas en la misma línea.
- Hay suficiente fricción estática entre las fichas y el piso para evitar que los dominós se deslicen en el piso.
- No se disipa energía en el punto de contacto



(a)



(b)

Figura 4. (a) Descripción de las variables relacionadas con la distancia de separación entre las piezas de domino,  $d$ , y la asignación de la variable  $A_k$  al número de fichas. (b) Descripción de las variables de la velocidad angular  $\Omega_k$  del experimento.

Luego  $\theta_k$  es el desplazamiento angular de una barra desde la vertical, y  $\omega_k = d\theta_k/dt$ , es la velocidad angular correspondiente dependiente del tiempo.  $\Omega_1$  es la velocidad angular inicial de la primera ficha inmediatamente después de empujarla.  $\Omega_k$  es la velocidad angular inicial de la ficha número  $k$  justo cuando comienza a moverse, vale aclarar que este es el resultado de la

entre las fichas y el piso.

- Las colisiones son instantáneas. Esto significa que el intervalo de tiempo  $\Delta t$  durante el cual ocurre una colisión es cero.
- Las colisiones son elásticas. Esto significa que la energía no se disipa durante las colisiones.
- Los dominós son rígidos. Esto significa que no hay deformación, por lo tanto, no se convierte la energía en energía potencial elástica de deformación.

### Definición de las Variables.

Para facilitar los cálculos presentamos la siguiente notación. Se etiquetan las fichas secuencialmente con los números  $1, 2, \dots, k, \dots$ , comenzando con 1 desde el extremo izquierdo, como se observa en la Figura 4a, etiquetamos  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$ , los puntos de pivote de las fichas, junto con las variables angulares se presentan en la Figura 4b.

colisión con el dominó previo, es decir el  $(k-1)$ , para  $k > 1$ .  $\Omega_{ak}$  es la velocidad angular de la ficha  $k$  justo antes de la colisión con la siguiente  $(k+1)$ .

$\Omega_{rk}$  es la velocidad angular de la ficha  $k$  justo después de la colisión con la siguiente  $(k+1)$ , la  $r$  es porque la barra acaba de rebotar.  $\beta_1$  en (1), representa el ángulo que forma el

dominó con la vertical en el punto de colisión con la siguiente ficha.

$$\beta_1 = \text{ArcSin}[d/\ell]$$

Finalmente,  $T_k$  es el tiempo que la ficha  $k$  tarda en caer desde la vertical hasta su colisión con la siguiente. En esta notación,  $\Omega_k$  es la velocidad angular de la ficha  $k$  en  $\theta = 0$  y  $\Omega_{ak}$ ,  $\Omega_{rk}$  sus velocidades angulares después de que ha caído a  $\theta=\beta_1$ , es decir, justo antes y justo después de la colisión con la ficha  $(k+1)$ , respectivamente.

**La Colisión entre dos fichas de dominó.**

La colisión entre las fichas  $k$  y  $(k+1)$ , con base en suposiciones propuestas en [15] garantizan que dicha colisión se conserva la energía cinética y el momento angular, y que mientras el dominó cae, se conserva su energía total. Justo antes de la colisión, el dominó  $k$  tiene velocidad angular  $\Omega_{ak}$  y el domino  $k+1$ , aún en reposo. Después de la colisión, la ficha  $k$  tiene velocidad angular  $\Omega_{rk}$  y el domino  $k+1$  tiene velocidad angular  $\Omega_{k+1}$ . Tomando la conservación de la energía cinética, este momento del movimiento es posible describirlo a través de (2).

$$\frac{1}{2}I\Omega_{ak}^2 = \frac{1}{2}I\Omega_{rk}^2 + \frac{1}{2}I\Omega_{k+1}^2$$

Donde, la inercia para la ficha de domino es  $I=m\ell^2$  con masa  $m$  y altura  $\ell$  de cada ficha, respectivamente. Ahora, aplicamos la conservación del momento angular con respecto al punto  $A_{k+1}$ . Justo antes de la colisión, la ficha  $k$  tiene velocidad angular  $\Omega_{ak}$  y, por lo tanto, velocidad de traslación  $v_k=\ell\Omega_{ak}$ , se puede mostrar que sólo el componente  $v_k \text{Cos}[\beta_1]$  contribuye al momento angular calculado alrededor del punto  $A_{k+1}$ , y que lo hace con el parámetro de impacto  $\ell\text{Cos}[\beta_1]$ .

La ficha  $k+1$  no tiene momento angular inicialmente, por lo tanto, podemos escribir que:

$$L_{\text{inicial}} = mv_k \text{Cos}[\beta_1] \ell \text{Cos}[\beta_1] = m\ell^2 \Omega_{ak} \text{Cos}^2[\beta_1]$$

Después de la colisión, la ficha  $k+1$  gira alrededor del punto  $A_{k+1}$  con velocidad angular  $\Omega_{k+1}$  y, por lo tanto, tiene un momento angular  $I\Omega_{k+1}$ . La ficha  $k$  tiene la nueva velocidad angular  $\Omega_{rk}$ , nuevamente alrededor del punto  $A_k$ . Por lo tanto, contribuirá un momento angular  $m\ell^2 \Omega_{rk} \text{Cos}^2[\beta_1]$  con respecto a  $A_{k+1}$ , obteniendo (4), como.

$$L_{\text{final}} = m\ell^2 \Omega_{rk} \text{Cos}^2[\beta_1] + I\Omega_{k+1}$$

Desde la conservación de los momentos angulares debemos verificar que el inicial es igual al final, como se indica en (5).

$$m\ell^2 \Omega_{ak} \text{Cos}^2[\beta_1] = m\ell^2 \Omega_{rk} \text{Cos}^2[\beta_1] + I\Omega_{k+1}$$

Del sistema de ecuaciones (3) y (5) se puede resolver fácilmente para  $\Omega_{k+1}$  y  $\Omega_{rk}$  obtenido las soluciones (6) y (7).

$$\Omega_{k+1} = 0, \quad \Omega_{rk} = \Omega_{ak}$$

$$\Omega_{k+1} = \frac{2\text{Cos}^2[\beta_1]\Omega_{ak}}{1+\text{Cos}^2[\beta_1]^2}, \quad \Omega_{rk} = \frac{(-1+\text{Cos}^2[\beta_1])\Omega_{ak}}{1+\text{Cos}^2[\beta_1]^2}$$

Las dos primeras soluciones en (6) son triviales y no nos aportan información, pero las de (7) si son interesantes. Ahora, considere la ficha  $k$  que cae de la vertical al ángulo  $\beta_1$ , por conservación energética total, obtengamos (8):

$$\frac{1}{2}I\Omega_k^2 + mg\ell = \frac{1}{2}I\Omega_{ak}^2 + mg\ell \text{Cos}[\beta_1]$$

Y que, al ser simplificada, obtenemos (9):

$$\Omega_{ak}^2 = \Omega_k^2 + \frac{2g}{\ell} (1 - \text{Cos}[\beta_1])$$

Tomando las ecuaciones (7) y (9), llegamos a (10) y (11):

$$\Omega_{k+1} = \pm \frac{2\text{Cos}^2[\beta_1] \sqrt{2g-2g\text{Cos}[\beta_1]+\ell\Omega_k^2}}{\sqrt{\ell}(1+\text{Cos}^2[\beta_1]^2)}$$

$$\Omega_{ak} = \pm \frac{\sqrt{2g-2g\text{Cos}[\beta_1]+\ell\Omega_k^2}}{\sqrt{\ell}}$$



Finalmente, encontramos invariancia de traslación, la velocidad angular inicial impartida a una ficha por su vecino se vuelve independiente de la posición [16]. Se observa que, en este límite el empuje inicial dado al primer domino se vuelve irrelevante, es decir  $\Omega_k^2 = \Omega^2$ .

### La Velocidad de Propagación de la Onda.

Para calcular la velocidad límite de la onda obtenemos el tiempo entre colisiones, trabajando en una hilera de fichas, se aplica la conservación de la energía sobre la ficha  $k$  mientras se mueve un ángulo arbitrario  $\theta$ , explicado a través de (12).

$$\frac{1}{2}I\Omega_n^2 + mg\ell = \frac{1}{2}I\frac{\partial\theta}{\partial t} + mg\ell\text{Cos}[\theta]$$

Tomando  $\omega_n = \partial\theta/\partial t$ , podemos utilizar el método de variables separables para  $t$  y  $\theta$ , los requerimientos para el ángulo son  $\theta=0$  y  $\theta=\beta_1$ , definido en la ecuación (1), obteniendo (13).

$$\Omega_n^2 + \frac{2g}{\ell} = (\theta'[t])^2 + \frac{2g}{\ell}\text{Cos}[\theta[t]]$$

Y obtenemos (14):

$$\int_0^{T_n} dt = \int_0^{\beta_1} \frac{d\theta}{\sqrt{\Omega_n^2 + \frac{2g}{\ell} - \frac{2g}{\ell}\text{Cos}[\theta]}}$$

La integral en (14) se puede expresar en términos de la integral elíptica completa del primer tipo  $K(k)$ , ver [17], obteniendo (15):

$$T = \frac{2 \text{F}\left[\frac{\beta_1}{2}, -\frac{4g}{\ell\Omega_n^2}\right] \sqrt{1 - \frac{2g(-1+\text{Cos}[\beta_1])}{\ell\Omega_n^2}}}{\sqrt{-\frac{2g(-1+\text{Cos}[\beta_1])}{\ell} + \Omega_n^2}}$$

Por lo tanto, la velocidad de la onda se aproxima a una velocidad límite  $v=d/T$ , mostrada en (16).

$$v = \frac{d}{T} = \frac{d \sqrt{-\frac{2g(-1+\text{Cos}[\beta_1])}{\ell} + \Omega_n^2}}{2 \text{F}\left[\frac{\beta_1}{2}, -\frac{4g}{\ell\Omega_n^2}\right] \sqrt{1 - \frac{2g(-1+\text{Cos}[\beta_1])}{\ell\Omega_n^2}}}$$

Para mayor detalle de la solución de (14), consultar el modelo de Boas [18]. Ahora, se puede aproximar la solución de la función  $\text{F}\left[\frac{\beta_1}{2}, -\frac{4g}{\ell\Omega_n^2}\right]$  en (15), obteniendo una solución en (17), muy aproximada del sistema.

$$v(d) = \sqrt{g} \frac{\ell^{\frac{3}{2}}}{d}$$

El comportamiento de (17), se observa en la Figura 5a, y muestra un comportamiento dependiente de la distancia de separación entre las fichas, tal y como se planteaba en muchas de las hipótesis propuestas por los estudiantes en el laboratorio.

Como se describió en el salto #3: *Análisis del problema*, podemos compararla aproximación teórica con los datos experimentales tabulados por los estudiantes en cada uno de sus grupos. Este fue un proceso adicional (de los objetivos instruccionales), con el fin de mejorar las capacidades para medir y reportar las mediciones junto al análisis de errores experimentales. El resultado de este último procedimiento se muestra en la Figura 5b.

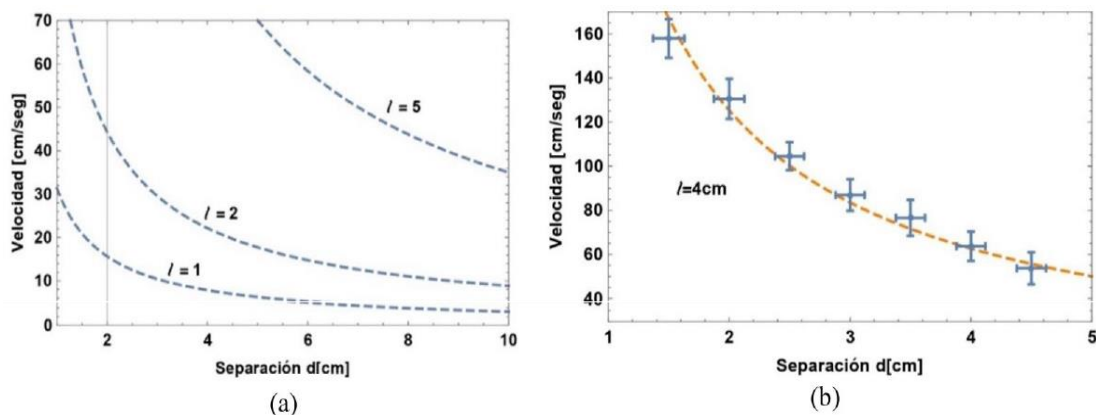


Figura 5. (a) De (18) se obtienen valores para la velocidad de propagación, y muestra que a mayor altura  $l=1,2$  y  $5$  cm, el comportamiento es divergente a un valor final común. Valores que no pueden existir debido al tamaño  $l$  aparecen en las curvas, dado que la solución es una aproximación. (b) Comparación del modelo teórico (línea punteada) y experimental (cruces) para la velocidad de propagación de la onda mecánica en una cadena de fichas de dominó como función de la separación  $d$  entre ellas.

### Trabajo Futuro: Aplicación de ABP con Problemas de Inteligencia Artificial (IA).

La propuesta de ABP con problemas donde se busque generar capacidades, habilidades y conocimientos en competencias digitales es muy importante en vista de las necesidades crecientes de estas en la vida laboral del profesional de Ingeniería.

Por tanto, dejamos aquí planteado la aplicación de ABP sobre el mismo problema incorporando las tecnologías digitales de IA, específicamente, las redes neuronales artificiales (RNA), con el propósito de establecer una tercera solución o explicación alternativa del problema.

Nuestro punto de partida para plantear el problema es cómo abordamos una solución con RNA [19-20]. Conocemos que el problema del efecto dominó busca establecer la velocidad de propagación en función de las variables altura de la pieza de dominó y la distancia de separación entre ellas. Pero, no son las únicas variables que intervienen en el fenómeno físico, como puede ser el espesor de cada pieza, pero que haría un poco más complejo el análisis matemático del problema.

Sin embargo, para una RNA las posibilidades de incluir más variables no es una limitante, y el problema podría resolverse con muchas más variables de las trabajadas en el problema inicial.

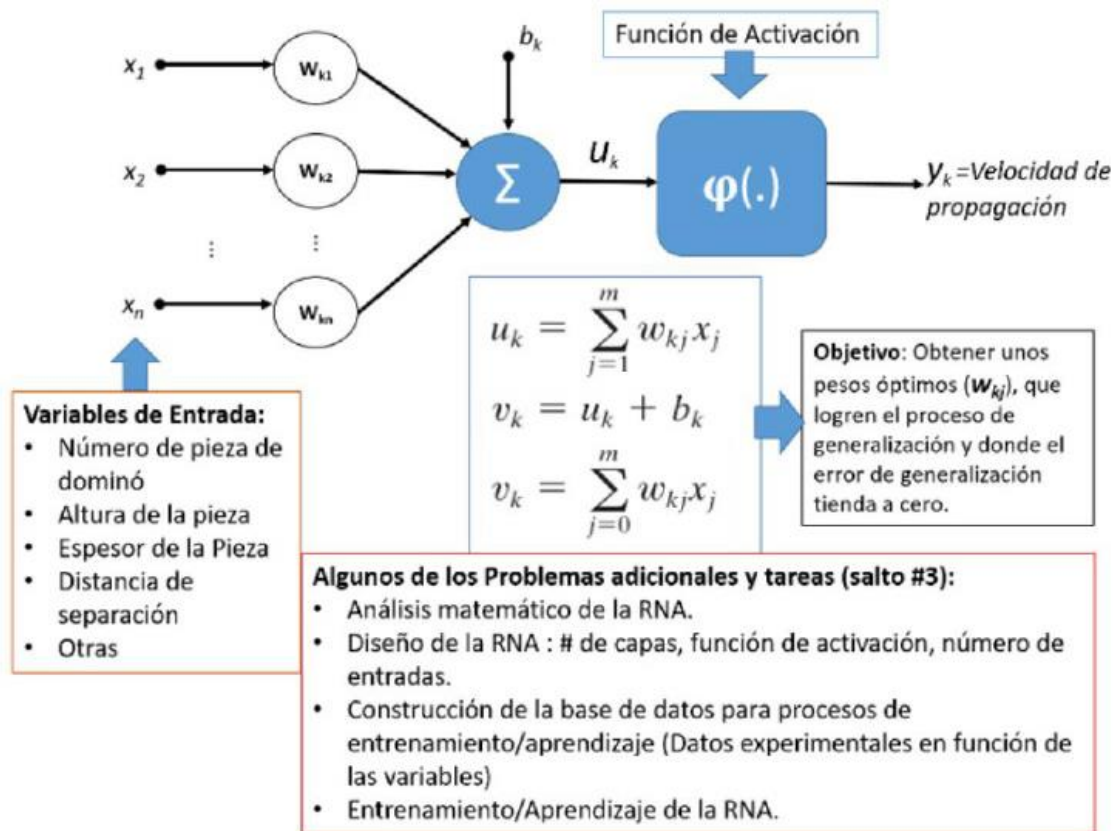
Podemos por tanto decir que, la metodología ABP para RNA busca darle un entendimiento más amplio al problema del efecto dominó, por cuanto es posible introducir más variables que intervienen en el cálculo de la velocidad de propagación.

Entonces, nuestra pregunta problema será: “¿Qué características y variables de diseño debe tener una red neuronal para solucionar el problema del “Efecto Dominó”? Conociendo que la salida de la red será la velocidad de propagación”

Con esta pregunta centramos al grupo de estudiantes en un conocimiento más profundo del fenómeno, buscando que ellos identifiquen las variables adicionales del problema, y darles a entender que aun cuando la matemática busca resolver los fenómenos de forma exacta, no posee todos los elementos para comprender por completo los fenómenos físicos.

una representación de la RNA, junto a las variables de entrada, la salida (velocidad de propagación), función de activación, variable de umbral, entre otros, y que los estudiantes deberán contemplar y abordar, de la mano del experto y del profesor.

El esquema se utilizará en el salto #2 para dar una mayor claridad de los términos, requerimientos y condiciones del problema que abordarán.



**Figura 6.** Esquema de la RNA, donde se presentan las entradas, su salida, y otros aspectos relacionados con tareas asociadas a la solución de problemas adicionales.

## Conclusiones

Dentro del análisis expuesto, es posible vislumbrar a los estudiantes siguiendo la ruta metodológica basada en el modelo de los 7 saltos de ABP, utilizando sus conceptos previos para cumplir con el objetivo del proceso que se articuló con los avances experimentales o teóricos de sus pares de otras carreras y semestres. Llegando a generar aprendizaje no solo al encontrar la solución, sino también en el proceso de obtenerla enfrentándose a problemas sin tener las competencias completamente desarrolladas para atender la solución, esto

forzó a los estudiantes a complementar sus conocimientos con sus colegas y el estudio autónomo.

De acuerdo con las investigaciones se deberían realizar pruebas en el grupo de estudio para comparar y analizar el impacto y el valor adquirido pre y post aplicación de la metodología pedagógico ABP bajo los siete saltos. Aun cuando no fue menester de este trabajo, esto no es una limitante ya que durante los primeros saltos se determinan las competencias iniciales y se definen las competencias a desarrollar como por ejemplo las digitales, estas competencias

se construyen en el proceso de sintetizar la solución del ABP.

Unodeloshallazgosimportantesencontrados, es que la solución analítica obtenida por los estudiantes a través del modelo teórico, y los resultados experimentales se ajustan muy bien.

Adicionalmente, la experiencia fue muy bien recibida por los estudiantes, manifestándolo a través de su desempeño en el abordaje y solución del problema. Se debe realizar un posterior modelo reduciendo aproximaciones, para llegar a una solución analítica más completa. También, se tiene planteado el problema utilizando la inteligencia artificial con redes neuronales, buscando incorporar las competencias digitales importantes para la vida profesional

## Referencias

- [1] H. Barrows, "A Taxonomy of Problem-Based Learning Methos", *Medical Education*, vol. 20, nº 6, pp. 481-486, 1986
- [2] P. Morales Bueno y V. Landa Fitzgerald, "Aprendizaje Basado en Problemas", *Theoria*, vol. 13, pp. 145-157, 2004. Disponible en <http://www.ubiobio.cl/theoria/v/v13/13.pdf>
- [3] B. Restrepo Gomez, "Aprendizaje Basado en Problemas (ABP): Una innovación didáctica para la enseñanza universitaria", *Educación y Educadores*, vol. 8, pp. 9-19, 2005. Disponible en <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=83400803>
- [4] M. T. Gonzalez Frias and A. Castro Lopez, "Impacto del ABP en el Desarrollo de la Habilidad para Formular Preguntas de Aprendizaje en Estudiantes Universitarios," *Revista de Docencia Universitaria*, vol. 9, no. 1, pp. 57-66, 2011. Disponible en: <https://polipapers.upv.es/index.php/REDU/article/view/6180/6230>
- [5] S. Nuñez-Lopez, J. Avila-Palet and S. Olivares, "El desarrollo del pensamiento crítico en estudiantes universitarios por medio del Aprendizaje Basado en Problemas," *Revista Iberoamericana de Educación Superior*, vol. VIII, no. 23, pp. 84-103, 2017. Disponible en: <http://www.scielo.org.mx/pdf/ries/v8n23/2007-2872-ries-8-23-00084.pdf>
- [6] J. Piaget, *Psicología de la Inteligencia*, Buenos Aires: Editorial Psique, 1972
- [7] P. Rodriguez, M. Guarnizo, I. Fetecua, J. Gomez and E. Rodriguez, "The Teachers Factor in the Value-Added Results of Colombian Higher Education Institutions," in *17th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education and Technology*, Montego Bay, 2019
- [8] D. E. Daykin, "Falling Dominoes," *SIAM Review*, vol. 13, no. 4, pp. 403-404, 1971
- [9] C. J. Efthimiou and M. D. Johnson, "Domino Waves," *SIAM Review*, vol. 49, no. 1, pp. 111-120, 2007
- [10] Council of the European Union, "Council Recommendation of 22 May 2018 on Key Competences for Lifelong Learning," European Union, Brussels, 2018
- [11] A. M. E. Colmenares, "Investigación-acción participativa: una metodología integradora del conocimiento y la acción," *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación*, vol. 3, no. 1, pp. 102-115, 2012. Disponible en: <https://revistas.uniandes.edu.co/doi/10.18175/vys3.1.2012.07>



- [12]A. Latorre, La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa, España: Editorial Graó, 2005
- [13]M. G. Pérez Serrano, Investigación Cualitativa. Retos e Interrogantes, Madrid: Editorial La Muralla, 2014
- [14]J. Toro Baquero, C. Reyes Blandón , R. Martinez, Y. Castelblanco, F. Cárdenas, J. Granés and C. A. Hernández, "Fundamentación Conceptual Área de Ciencias Naturales," Grupo de Procesos Editoriales - ICFES, Bogotá, D.C., 2007
- [15]S. Shaw, "Mechanics of a Chain of Dominoes," *American Journal of Physics*, vol. 46, no. 6, p. 640, 1978
- [16]J. Walker, "The Amateur Scientist: Deep think on dominoes falling in a row and leaning out from the edge of a table," *Scientific American*, pp. 122-129, 1984
- [17]I. M. Ryzhik and I. S. Gradshtein, Table of Integrals, Series, and Products., New York: Academic Press, 1965
- [18]M. L. Boas, Mathematical Methods in the Physical Sciences, Wiley, 2007
- [19]O. I. Abiodun et al., "Comprehensive Review of Artificial Neural Network Applications to Pattern Recognition", in *IEEE Access*, vol. 7, pp. 158820-158846, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2945545.16
- [20]A. Shrestha and A. Mahmood, "Review of Deep Learning Algorithms and Architectures", in *IEEE Access*, vol. 7, pp. 53040-53065, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2912200